
Stanford University Libraries
3 6105 000 820 501

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

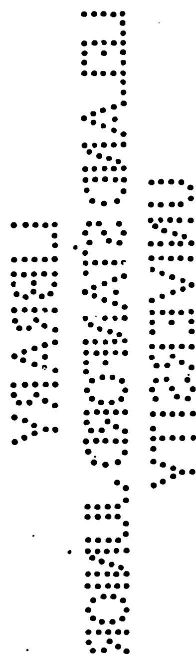
14

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1890—91.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.



ÜBER EINIGE GRUNDGEBILDE DER PROJECTIVEN GEOMETRIE

VON

C. JUEL

in KOPENHAGEN.

Seit dem Erscheinen der v. STAUDT'schen Geometrie der Lage ist es wie bekannt der synthetischen Geometrie möglich ihre Sätze ganz allgemein aufzustellen d. h. ohne Rücksicht darauf, ob einige oder auch alle der eingehenden Elemente im Sinne der analytischen Geometrie imaginär sind. Nachdem die geometrischen Bedeutungen der imaginären Grundelemente eingeführt worden sind, ist es nun systematisch richtig und in der projectiven Geometrie genau besehen nothwendig von vorne herein alle Elemente als unbedingt complex aufzufassen und z. B. die Beweise der Sätze in der Geometrie der Ebene gleich so zu führen, dass sie auch in der imaginären Ebene ihre Gültigkeit behalten. Hierbei fällt aber fürs erste die besondere Stellung der reellen Elemente innerhalb der Sammlung aller Elemente der Ebene weg, und dies ist für gewisse weitere Untersuchungen ein Hinderniss. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist nun der, eine Grundlage für die *allgemein projective* Behandlung derjenigen Fragen zu geben, welche grade auf eine Unterscheidung des reellen und des imaginären hinauslaufen.

Im ersten Abschnitte gebe ich eine Theorie der Sammlung derjenigen Punkte einer Ebene, in welche die reellen Punkte einer reellen Ebene durch eine allgemeine projective Transformation übergehen. Diese Sammlung wird eine zweidimensionale Kette genannt, in Übereinstimmung mit der v. STAUDT'schen Terminologie, wo Kette (welche im vorliegenden einfache Kette genannt wird) die Sammlung derjenigen Punkte einer

Graden bedeutet, in welche die reellen Punkte einer reellen Graden durch eine projective Transformation übergehen. Als ein einfaches Beispiel wähle ich die Aufgabe zu bestimmen durch wie viele centrische Projectionen vier allgemeine Punkte einer imaginären Ebene in vier reelle Punkte projicirt werden können.

Im zweiten Abschnitte werden zunächst die vorstehenden Sätze dazu benutzt, die Paare von reellen oder conjugirt imaginären entsprechenden Punkten bei der projectiven Transformation einer reellen Ebene in sich zu bestimmen. Dann werden ferner besonders die hier sog. symmetralen Beziehungen behandelt. Es sind diese bisher ziemlich wenig untersucht, und soviel ich weiss, nirgends in systematischem Aufbau.[1]

Obgleich ich die algebraischen Ausführungen bis auf spätere Zeit verschiebe, lassen sich die hier behandelten Probleme am leichtesten in analytischer Form andeuten. Bedeutet nämlich $\bar{x}$ die conjugirt imaginäre Zahl zu x, wird eine allgemeine symmetrale Transformation der Ebene durch die Transformationsformeln

$$\rho \bar{x}_1 = ax + by + cz \quad \text{u. s. w.}$$

bestimmt. Es werden die Doppelelemente und involutorischen Paare in derjenigen ebenen Correlation bestimmt, deren entsprechende Punkte symmetral gepaart sind. Diese Correlation nenne ich eine zweidimensionale Symmetralität, freilich inconsequent, indem sonst überall, wenn von einer einfach unendlichen Zahl (von Lösungen) die Rede ist, damit die Zahl der reellen Punkte einer reellen Graden gemeint wird. Es zeigt sich ferner, dass $\bar{x} = x$ der allgemeinsten Form einer involutorischen Symmetraltransformation entspricht.

Der wesentlichste Theil dieses Abschnittes behandelt aber — in synthetischer und directer d. h. construirender Form — die Frage, in wiefern sich die Transformationsgleichungen mit reellen Coefficienten schreiben lassen. Es ist dies für die projectiven Transformationen im Allgemeinen nicht möglich — für die symmetralen dagegen immer, im Allgemeinen entweder durch zwei oder durch vier Gruppen von Transformationen (Coordinatenänderungen). Ich habe hier eine gewisse Voll-

[1] In Felix Klein *Über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale* finden sich wichtige Sätze über weitergehende Beziehungen dieser Art.

ständigkeit beabsichtigt und die Resultate für alle nicht zerfallenden Transformationen angegeben.

Es mag noch auf die Beziehungen dieser Arbeit zu denjenigen Untersuchungen von Möbius, welche sich an die Theorie der Kreisverwandtschaften anknüpfen, hingewiesen werden. Die hier gewonnenen Resultate welche, wenn man sich allein an das Gebiet der imaginären Graden hält, auch ganz elementargeometrische Sätze geben, reichen jedoch wesentlich über die Möbius'schen hinaus.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die Hauptresultate dieser Untersuchung obgleich zum Theil mit anderer Begründung, schon in meiner Doctordissertation v. J. 1885 zu finden sind.

Die zweidimensionale Kette.

In einer reellen Ebene giebt es nach der projectiven Zählung v. Staudt's $n^4 + n^2 + 1$ reelle und imaginäre Punkte, insbesondere $n^2 + 1$ reelle Punkte, wenn die reelle Grade $n + 1$ reelle Punkte enthält. Die imaginäre Ebene ist von derselben Mächtigkeit wie die reelle; man wird desshalb auch die Sammlung der $n^2 + 1$ Punkte einer imaginären Ebene bestimmen können, welche wie die Sammlung der reellen Punkte einer reellen Ebene dadurch characterisirt ist, dass der Schnittpunkt zweier Graden, welche zwei der Sammlung angehörigen Paare von Punkten verbinden, selbst ein Punkt der Sammlung ist.

Diese Sammlung oder Gruppe von Punkten sei eine *zweidimensionale Kette* genannt und K^{II} geschrieben. Es seien A und B zwei Punkte von K^{II}, C ein Schnittpunkt von AB und einer Verbindungsgraden zwischen zwei anderen Punkten der Kette. Die ganze in der Graden AB enthaltene durch A, B und C gehende einfache Kette k wird dann in K^{II} enthalten sein. Nach dem Vorgange des Herrn Moritz Pasch in den *Vorlesungen über neuere Geometrie,* kann man nämlich durch Constructionen, welche die Kette K^{II} nicht verlassen, ein »Netz» von Punkten $A, C_1, C_2, \ldots, C_n = B$ herstellen, dergestallt dass

$$(AC_r) = (AC_1) + (AC_1) + \ldots + (AC_1) \quad (r \text{ Addenden}),$$

wo die Additionen im v. STAUDT'schen Sinne zu nehmen sind, so dass A der Nullpunkt und C der Unendlichkeitspunkt der additiven Transformation ist. Weil man n so gross nehmen kann, wie man will, lässt sich durch fortgesetzte Construction von Punkten des Netzes $AC_1C_2\dots$ jeder Punkt der einfachen Kette ABC mit beliebiger Genauigkeit erreichen.[1]

Wenn die Grade AB noch einen nicht in k liegenden Punkt mit K^{II} gemein hat, muss jeder Punkt von AB in K^{II} liegen, und diese wird dann gradezu aus den Punkten der Graden bestehen; diesen Fall schliessen wir aus.

Eine Grade, welche mit K^{II} eine einfache Kette von Punkten gemein hat, sei der zweidimensionalen Kette *adjungirt* genannt.

Die einfachen Ketten, welche in einer und derselben zweidimensionalen enthalten sind, bilden eine Sammlung, welche in projectiver Beziehung ganz der Sammlung der in einer reellen Ebene liegenden reellen Graden analog ist. Ebenso wie man die imaginären Elementargebilde einer reellen Ebene durch reelle involutorische Gebilde darstellen kann, wird man auch in der imaginären Ebene jeden Punkt und jede Grade durch involutorische Gebilde darstellen können, welche in einer beliebigen festen zweidimensionalen Kette enthalten sind. Es ist nicht nöthig dies näher auszuführen[2] und ich schliesse gleich hieraus:

Jede Grade einer Ebene, welche einer gegebenen K^{II} nicht adjungirt ist, hat einen und nur einen Punkt mit der Kette gemein, und

Durch jeden Punkt einer Ebene, welcher nicht in einer gegebenen K^{II} liegt, geht eine und nur eine Grade, welche der Kette adjungirt ist.

Das duale Gebilde zu den Punkten einer K^{II} wird aus den Graden gebildet, welche einer anderen K^{II} adjungirt sind. Insbesondere werden die Graden, welche durch einen festen Punkt einer K^{II} gehen und derselben Kette adjungirt sind, eine »einfache Kette von Graden» bilden d. h. sie werden eine beliebige Grade in Punkten einer einfachen Kette schneiden.

Durch eine Involution von Punktpaaren, welche in einer in K^{II} enthaltenen einfachen Kette liegen, werden zwei Punkte der Ebene bestimmt, weil man die Involution in zwei Sinnen durchlaufen kann. Von zwei

[1] Vgl. M. PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie,* § 15.
[2] Siehe v. STAUDT, *Beiträge,* No. 138.

solchen Punkten werden wir sagen, dass sie in Bezug auf die Kette K^{II} symmetrisch liegen, oder dass sie durch die Kette K^{II} harmonisch getrennt werden. Man sieht leicht, dass die Punkte, welche zu den Punkten einer Graden oder den Punkten einer beliebigen Kette in Bezug auf eine feste Kette K^{II} symmetrisch liegen, selbst bzw. in einer Graden oder in einer Kette liegen werden.

Wir wollen jetzt die Sammlung der Träger derjenigen Punkte bestimmen, welche einer festen K^{II} angehören.

Es seien A und B zwei Graden, welche der K^{II} adjungirt sind und demnach zwei einfache Ketten a^1 und b^1 mit K^{II} gemein haben werden. Die Träger der a^1 und b^1 angehörigen Punkte bilden zwei Regelschaaren α^2 und β^2, die nach dem obigen eine Grade m gemein haben. Durch jeden reellen Punkt von m gehen zwei Graden, die eine der Regelschaar α^2, die andere der β^2 angehörig. In der durch zwei solche Graden bestimmten Ebene liegt eine Grade — eine imaginäre Grade erster Art — die mit K^{II} zwei Punkte gemein hat und demnach der Kette adjungirt ist. Umgekehrt wird jede reelle Ebene μ, welche eine der K^{II} adjungirte imaginäre Grade erster Art enthält, einen Strahl mit α^2 sowie mit β^2 gemein haben und also die beiden durch α^2 und β^2 bestimmten Hyperboloide berühren. Die Ebenen μ werden also auch den um die Hyperboloide umgeschriebenen Torso berühren; dieser ist hier reell, weil α^2 und β^2 reelle Graden enthalten und einen gemeinsamen reellen Strahl besitzen. Betrachten wir nun eine beliebige in K^{II} enthaltene einfache Kette k^1, so bestimmt diese wie oben ein Hyperboloid, und auch dieses wird wie α^2 und β^2 in dem genannten Torso eingeschrieben sein. Hieraus folgt, dass die Träger der Punkte der k^1 — und demnach die Träger aller Punkte der K^{II} — Doppeltangenten des Torsos sein werden; die Berührungspunkte sind entweder reell oder conjugirt imaginär.

Umgekehrt sieht man auch leicht, dass zwei Regelschaaren, welche in einen Torso dritter Classe eingeschrieben sind, immer einen Strahl gemein haben, und dass zwei Doppeltangenten des Torsos eine und nur eine eingeschriebene Regelschaar bestimmen.[1] Man hat also:

Die Trägerkongruenz der Punkte einer zweidimensionalen Kette wird aus den reellen Doppeltangenten eines reellen Torsos dritter Classe gebildet.

[1] Das entwickelte wird leicht übersichtlich, wenn das Dualitätsprincip angewendet wird.

Eine Kette zweiter Dimension kann der Definition zufolge nicht durch weniger als vier Punkte bestimmt sein. Sind aber *ABCD* vier Punkte einer Kette K^{II} und *E* der Schnittpunkt (*AB* . *CD*), so werden die einfachen Ketten (*ABE*) und (*CDE*) zwei Regelschaaren und diese ferner einen Torso dritter Classe und damit die K^{II} bestimmen. Weil zwei einer Kette adjungirte Graden sich in einem Punkte der Kette schneiden, hat man gleich:

Eine zweidimensionale Kette ist eindeutig bestimmt durch 1) *vier Punkte* 2) *drei Punkte und eine adjungirte Grade* 3) *einen Punkt und drei adjungirte Graden* 4) *vier adjungirte Graden.*

Dabei dürfen selbstverständlich nicht drei der Punkte in einer Graden liegen und nicht drei der Graden durch denselben Punkt gehen.

Weiter hat man:

Eine zweidimensionale Kette ist eindeutig bestimmt, wenn sie zwei Punkte A und B enthalten und zwei andere C und D harmonisch trennen soll.

Wenn *AB* und *CD* — die nicht zusammenfallen dürfen — einander in *E* schneiden, lege man in der Graden *CD* eine einfache Kette k^1, welche durch *E* geht und *C* und *D* harmonisch trennt,[1] ebenso in *AB* eine Kette k^1_1, welche durch *A*, *E* und *B* geht. Die Ketten k^1 und k^1_1 bestimmen die gesuchte Kette K^{II}.

Auf diese Bestimmung lässt sich die folgende zurückführen:

Eine zweidimensionale Kette ist eindeutig bestimmt, wenn sie zwei Paare von Punkten CD und EF harmonisch trennen soll.

Die genannte Kette muss nämlich auch durch die Punkte (*CE*.*DF*) und (*CF*.*DE*) gehen.

Noch sei bemerkt, dass eine zweidimensionale Kette durch zwei einfache Ketten von Graden bestimmt ist, wenn diese einen Strahl gemein haben.

Wenn man die in eine Grade zerfallenen Ketten ganz von der Betrachtung ausschliesst, sind in projectiver Beziehung alle Ketten gleich

[1] Siehe v. STAUDT, *Beiträge*, No. 141.

allgemein. In nicht projectiver Beziehung finden sich dagegen specielle Ketten, die in mehreren Problemen auftreten können, und ich werde diese hier anführen, indem ich bei der Classification von der Lage der Kette zur reellen Axe *u* der imaginären Ebene ausgehe.

I. *Die reellen Punkte der Axe u gehören alle der Kette an.*

Es seien A und B zwei Punkte der Kette; die Grade AB wird dann einen reellen Punkt enthalten nämlich $(AB.u)$. AB muss desshalb eine imaginäre Grade erster Art sein, und die Träger der Punkte A und B müssen sich schneiden. Indem A und B beliebige Punkte von K^{II} sind, folgt daraus, dass in diesem Falle alle Träger von Punkten der Kette durch einen festen Punkt gehen müssen. Eine Kette dieser Art erhält man, wenn man die reellen Punkte einer reellen Ebene aus einem reellen Punkte auf eine imaginäre Ebene projicirt.

II. *Die Axe u ist der Kette adjungirt.*

Sind A, B, C, D vier Punkte der Kette, deren Träger sich nicht schneiden, werden die durch $A, B, (AB.u)$ und $C, D, (CD.u)$ gehenden einfachen Ketten zwei Regelschaaren α^2 und β^2 bestimmen; diese haben hier zwei Strahlen gemein, nämlich u und den Träger f von $(AB.CD)$. Die Träger der Punkte von K^{II} werden desshalb in diesem Falle eine lineare Congruenz bilden, deren Leitgraden die zwei (reellen oder imaginären) Graden sind, in denen sich die durch α^2 und β^2 bestimmten Hyperboloide ausser in u und f schneiden. Die einfache Kette von Punkten, welche u hier mit K^{II} gemein hat, wird keinen oder auch zwei reelle Punkte enthalten; jenachdem der eine oder der andere Fall eintritt, wird die lineare Congruenz zwei conjugirt imaginäre oder auch zwei reelle Leitgraden haben.

III. *Die Axe u hat einen und nur einen reellen Punkt mit der Kette gemein.*

Wenn O der reelle Punkt der Kette K^{II} ist, gehen durch O unendlich viele zu K^{II} adjungirte Graden erster Art, also auch unendlich viele Berührungsebenen zu dem durch die Kette bestimmten Torso. Dieser muss desshalb hier in einen Kegel zweiter Classe, dessen Spitze in O fällt, und noch eine Grade p zerfallen. Die Träger der Punkte dieser speciellen Kette werden demnach alle einen Kegel zweiter Classe berühren und ausserdem eine feste Tangente p dieses Kegels schneiden; p ist selbst Träger eines Punktes der Kette.

Auf eine Kette der letzten Art kommt man, wenn man die reellen Punkte einer reellen Ebene aus einem imaginären Punkte P des Raumes auf eine imaginäre Ebene projicirt; die Träger der Projektionen werden dann den Träger p von P schneiden und müssen demnach auch einen festen Kegel berühren — was übrigens auch eine von dem obigen unabhängige kurze Überlegung direct zeigen würde.

Umgekehrt kann man sich jede Kette der Art III in der oben genannten Weise erzeugt denken. Auf der Graden p, welche von sämmtlichen Trägern geschnitten wird, wähle man nur einen beliebigen imaginären Punkt P. Die reellen Punkte derjenigen Graden, welche P mit drei imaginären Punkten von K^{II} verbinden, bestimmen eine reelle Ebene, deren reelle Punkte aus P in die Punkte von K^{II} projicirt werden.

Nach diesen Bemerkungen ist es leicht die Frage zu behandeln, durch wie viele centrische Projectionen sich vier allgemeine Punkte $ABCD$ einer imaginären Ebene in vier reelle Punkte einer reellen Ebene übertragen lassen. Durch eine Projection ist dies im Allgemeinen jedenfalls nicht möglich, denn die durch $ABCD$ gehende Kette K^{II} müsste dann von der speciellen Art III sein. Man kann es aber immer durch eine Projection erreichen, dass eine beliebige Kette in einer Ebene π in eine Kette von dieser besonderen Art, welche in einer anderen imaginären Ebene π_1 liegt, transformirt wird. Man braucht nämlich nur das (reelle oder imaginäre) Projectionscentrum in dem Träger m eines Punktes M der Kette — aber ausserhalb π — und die reelle Axe von π_1 durch einen reellen Punkt von m zu wählen. Durch zwei auf einander folgende Projectionen kann man also immer das verlangte leisten. Hierbei ist dass zuletzt benutzte Projectionscentrum im Allgemeinen imaginär. Man kann aber auch fragen, wie viele Projectionen nöthig sind, wenn sie sämmtlich reell sein sollen. Man wird dann sehen, dass man mit *drei Projectionen* auskommen kann. Durch Projection aus einem reellen Punkte kann man nämlich erst wie oben eine Kette K_1^{II}, der Art III herstellen. Die Träger der Punkte von K_1^{II} schneiden alle eine Grade p und berühren eine Kegelfläche $\varkappa$. Man lege nun eine reelle Berührungsebene α zu $\varkappa$, welche p in P schneiden möge. Die Projection von K_1^{II} aus P auf eine imaginäre Ebene π_2, deren Axe in α liegt, wird dann eine Kette in π_2 von der oben genannten Art I ergeben; diese Kette kann ferner

aus einem bestimmten reellen Punkte in die Kette der reellen Punkte einer ganz beliebigen reellen Ebene projicirt werden.

Wir wollen jetzt zwei zweidimensionale Ketten betrachten, welche in derselben Ebene liegen, und die gemeinsamen Punkte derselben bestimmen. Die Anzahl dieser Punkte kann im Allgemeinen höchstens drei betragen, weil eine Kette schon durch vier Punkte bestimmt ist.

Die gegebenen Ketten seien K^{II} und K_1^{II}; um die Schnittpunkte zu bestimmen, lege man durch einen beliebigen festen Punkt A von K^{II}, der nicht in K_1^{II} liegt, die Graden a, welche der K^{II} adjungirt sind, und deren Schnittpunkte mit K_1^{II} eine einfach unendliche kontinuirliche und geschlossene Reihe von Punkten bilden. Diese Punktreihe α kann mit einer in K_1^{II} liegenden einfachen Kette k_1 höchstens zwei Punkte gemein haben, denn durch k_1 wird eine Grade bestimmt, welche von den Graden a in den Punkten einer neuen einfachen Kette k_2 geschnitten wird, und k_1 und k_2 können höchstens zwei Punkte mit einander gemein haben — wenn aber einen dann im Allgemeinen noch einen zweiten.

Ersetzt man A durch einen neuen Punkt B von K^{II}, erhält man in K_1^{II} eine neue analoge Punktreihe β. Auf die Schnittpunkte von α und β kann man die üblichen Sätze der geometria situs über reelle Curvenzweige anwenden, was desshalb angeht, weil man für diese Sätze projective Beweise geben kann. Indem nun α und β von jeder der Kette K_1^{II} adjungirten Graden in zwei Punkten geschnitten werden, müssen α und β einander in einer graden Anzahl von Punkten schneiden. Ein Schnittpunkt ist aber von vorne herein gegeben, nämlich der in K_1^{II} liegende Punkt von AB; jeder andere Schnittpunkt liegt sowohl in K_1^{II} — weil in α —, als in K^{II} — weil er der Schnittpunkt zweier zu K^{II} adjungirten Graden ist; K^{II} und K_1^{II} werden also im Allgemeinen einen oder drei Punkte gemein haben; diese letzteren können aber auch wie gewöhnlich zusammenfallen.

Bei besonderer Wahl von A kann die zugehörige Kette α alle Punkte einer einfachen Kette k_1 enthalten. Weil α auch in diesem Falle mit jeder anderen in K_1^{II} liegenden einfachen Kette höchstens zwei Punkte gemein haben kann, muss α hier aus zwei einfachen Ketten zusammengesetzt sein.

Bei specieller Lage von K^{II} und K_1^{II} kann es ferner geschehen, dass auch β in ein Paar von Ketten zerfällt, von welchen die eine mit einer

derjenigen Ketten identisch ist, in welche α zerfällt. In diesem Falle werden dann K^{II} und K_1^{II} alle Punkte einer einfachen Kette und ausserdem noch einen isolirten Punkt gemein haben.

Weil die zweidimensionalen Ketten selbstdualistische Gebilde sind (siehe S. 4), sieht man gleich, dass zwei solche Ketten im Allgemeinen entweder eine oder auch drei adjungirte Graden gemein haben werden; wenn deren drei existiren, werden sie die drei gemeinsamen Punkte der Ketten verbinden.

Betrachten wir noch besonders den Fall, wo K^{II} und K_1^{II} nur einen Punkt gemein haben, der aber nicht mehrfach zu zählen ist. In diesem Falle giebt es auch eine (und nur eine) Grade a, die sowohl zu K^{II} wie zu K_1^{II} adjungirt ist, und demnach mit diesen die einfachen Ketten k_1 und k_2 gemein hat. Weil nun diese einander nicht schneiden, kann man wie folgt sehen, dass sie beide durch ein und dasselbe Punktpaar getrennt sein werden. Die Punkte, welche durch k und k_1 von einem beliebigen Punkte P der Graden a harmonisch getrennt sind, seien bzw. Q und Q_1. Durch P, Q und Q_1 geht eine einfache Kette, welche k und k_1 in MN bzw. M_1N_1 schneiden möge, und diese zwei immer reellen Punktpaare werden einander nicht trennen, wenn, wie vorausgesetzt, k und k_1 einander nicht schneiden.[1] Es finden sich demnach in der durch PQQ_1 gehenden Kette zwei Punkte E und F, welche durch MN sowie durch M_1N_1 harmonisch getrennt werden. Dieselben Punkte sind der Definition zufolge auch durch K^{II} und K_1^{II} harmonisch getrennt, oder liegen in Bezug auf diese symmetrisch.

Es folgt also:

Zwei zweidimensionale Ketten haben im Allgemeinen einen oder auch drei Punkte, sowie bzw. eine oder auch drei adjungirte Graden gemein. Wenn sie einen und nur einen Punkt gemein haben, giebt es zwei Punkte — und auch zwei Graden — welche in Bezug auf die beiden Ketten symmetrisch liegen.

Wenn die zwei Ketten mehr als drei Punkte gemein haben, werden die gemeinsamen Punkte aus allen Punkten einer einfachen Kette und noch einem isolirten Punkte bestehen.

---

[1] Siehe v. STAUDT, *Beiträge* No. 207.

Ich will hier noch die besondere Lage von zweidimensionalen Ketten hervorheben, welche eintritt, wenn man eine Kette K_1^{II} durch zwei Paare von Punkten legt, welche in Bezug auf eine andere Kette K^{II} symmetrisch liegen. Weil eine zweidimensionale Kette durch vier Punkte bestimmt ist, wird K_1^{II} in Bezug auf K^{II} selbstsymmetrisch sein, d. h. die Punkte von K_1^{II} werden sich in Paare von Punkte vertheilen, welche durch K^{II} harmonisch getrennt sind. Man kann nun zeigen, dass diese Lage gegenseitig ist, d. h., dass auch K^{II} in Bezug auf K_1^{II} selbstsymmetrisch sein wird. Es seien AA' und BB' zwei Paare von Punkten in K_1^{II}, welche in Bezug auf K^{II} symmetrisch liegen. Die Grade AA' ist zu K^{II} wie zu K_1^{II} adjungirt, und sie habe mit der ersteren die Punkte der einfachen Kette k, mit der zweiten die Punkte der Kette k_1 gemein. Dann wird k_1 in Bezug auf k selbstsymmetrisch sein, und daraus folgt, dass auch k in Bezug auf k_1 selbstsymmetrisch sein wird;[1] zwei solche Ketten kann man als einfache Orthogonalketten bezeichnen. Demnach finden sich in k Punktpaare, welche in Bezug auf K_1^{II} symmetrisch liegen. Ebenso kann man in der Graden BB' Punktpaare bestimmen, welche in Bezug auf K_1^{II} symmetrisch und zugleich in K^{II} liegen, und hieraus folgt der Satz.

Zwei solche Ketten, welche wir als *gegenseitige Orthogonalketten* bezeichnen wollen, sind in dem oben erwähnten Fall unendlich viele Punkte mit einander gemein zu haben, nämlich einen isolirten Punkt O und ausserdem noch alle Punkte einer gewissen einfachen Kette k. Durch O gehen zugleich die Verbindungsgraden aller derjenigen Punktpaare in der einen Kette, welche in Bezug auf die andere symmetrisch liegen, und die Punkte eines beliebigen Paares werden durch O und k harmonisch getrennt.

Die zwei einfachsten Punkttransformationen einer Ebene.

Die einfachste Transformation eines ebenen Punktsystems in ein anderes, wird diejenige sein, welche jeden Punkt und jede Grade der einen Figur in ein ebensolches Element der anderen transformirt. Wird ferner vorausgesetzt, dass Incidenz- und Coincidenzverhältnisse unverändert übergehen, in welchem Falle wir die Transformation continuirlich nennen,

[1] Siehe v. Staudt, *Beiträge* No. 240.

schliesst man aus der Grundeigenschaft des vollständigen Vierecks, dass vier harmonische Punkte wieder in vier harmonische Punkte übergehen. Daraus ist man aber bei allgemeiner projectiver Auffassung, welche alle Elemente als unbedingt complex voraussetzt, noch nicht berechtigt zu schliessen, dass jede Elementarreihe in eine damit projective übergehe. Die v. STAUDT'sche Definition der projectiven Beziehung von zwei einförmigen Elementarreihen lautet auch wie folgt: zwei einförmige Gebilde sollen zu einander projectivisch heissen, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des anderen entspricht und überdies je zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind.[1] Aus dieser Definition leitet er dann den *Satz* ab, dass in zwei projectiven graden Punktreihen vier harmonischen Punkten wieder vier harmonische Punkte entsprechen. v. STAUDT schlägt also bei der Bestimmung der Projectivität zweier complexen Elementarreihen einen ganz anderen Weg ein als bei den reellen projectiven Reihen. Dies war aber nothwendig; die v. STAUDT'schen Beweise zeigen nämlich in der That zugleich, dass wenn zwei einförmige Gebilde so auf einander bezogen sind, dass die Elemente derselben einander gegenseitig eindeutig entsprechen und überdies je zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, nicht von derselben Art sind, auch dann die vier harmonischen Elementen entsprechenden wieder vier harmonische Elemente sind.

Eben auf der v. STAUDT'schen Arbeit fussend muss es dann berechtigt erscheinen von vorne herein neben der projectiven Beziehung von zwei Ebenen noch eine andere aufzustellen, welche continuirlich ist, und in welcher Punkt und Grade wieder Punkt und Grade entsprechen, während entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, nicht von derselben Art sind. Diese wollen wir eine *symmetrale* Beziehung und die zugehörige Transformation eine symmetrale Transformation nennen. Es giebt in der That nur zwei Möglichkeiten, denn die Punkte zweier graden Punktreihen a und b der einen Figur kann man immer perspectiv mit einander verknüpfen, wodurch die Punkte der entsprechenden Reihen a_1 und b_1 auch so mit einander verknüpft werden. Es ist desshalb nicht möglich, dass zwei Punktreihen a und a_1 projectiv, während zwei andere b und b_1 symmetral gepaart sein können.

[1] Siehe v. STAUDT, *Beiträge* No. 215.

Eine aus Punktpaaren PP_1 gebildete Figur nenne ich eine *Collineation* (*Projectivität*) oder eine *Symmetralität*, jenachdem die Punkte P in die zugehörigen Punkte P_1 durch eine projective oder eine symmetrale Transformation übergehen. Der Satz, dass durch eine projective Transformation einer Ebene in sich im Allgemeinen drei Punkte in sich übergehen, kann man dann auch so ausdrücken, dass es in einer (zweidimensionalen) Projectivität drei Doppelpunkte giebt. Man hat als die einfachsten Sätze:

Eine Symmetralität ist durch vier beliebige Paare bestimmt.

Dieser Satz lässt sich ganz wie der analoge über die Projectivität beweisen, und ist denselben Beschränkungen wie dieser unterworfen.[1]

Zwei Systeme, welche zu einem und demselben dritten Systeme symmetral sind, werden unter sich projectiv sein.

Dieser Satz, der eine directe Folge der Definition ist, zeigt, dass die symmetralen Transformationen nicht wie die projectiven eine Gruppe bilden.

Ehe ich in der Untersuchung der symmetralen Beziehungen weiter gehe, will ich erst mit Benutzung der im vorigen Abschnitte eingeführten zweidimensionalen Kette die Frage beantworten, wie viele reelle Elemente durch eine projective oder symmetrale Transformation wieder in reelle Elemente übergehen, wobei die Figuren in derselben reellen Ebene gedacht sind. Die reellen Punkte der Ebene bilden dann eine Kette, während zwei conjugirt imaginäre Punkte durch diese Kette harmonisch getrennt sind. Weil nun eine Kette durch jede projective und symmetrale Transformation in eine ebensolche übergeht, und die Elemente, welche zwei zweidimensionale Ketten mit einander gemein haben können, früher untersucht worden sind, hat man:

Durch eine allgemeine projective oder symmetrale Transformation einer reellen Ebene in sich werden entweder drei reelle Punkte und drei reelle Graden oder auch nur ein reeller Punkt und eine reelle Grade in reelle Elemente transformirt. In dem letzteren Falle giebt es zugleich ein Paar von conjugirt imaginären Punkten — und von conjugirt imaginären Graden — welche in ein ebensolches Paar transformirt werden. Speciell können

---

[1] In diesem Satze liegt zugleich der Existenzbeweis.

auch alle reellen Punkte einer reellen Graden und noch ein isolirter Punkt in reelle Punkte transformirt werden.

In dem letzten speciellen Falle werden auch unendlich viele Paare von conjugirt imaginären Punkten in solche übergehen; diese Paare werden in jeder der Figuren in einer Graden liegen. Wenn aber zwei Paare von conjugirt imaginären Punkten, welche nicht in einer Graden liegen, wieder in solche übergehen, muss zugleich jeder reelle Punkt in einen reellen übergehen, weil eine zweidimensionale Kette, welche zwei Paare von nicht in einer Graden liegenden Punkten harmonisch trennt, dadurch eindeutig bestimmt ist.

Noch specieller kann die Kette der reellen Punkte in Punkte einer Kette transformirt werden, welche zur ersteren orthogonal ist. Man ersieht hieraus die Möglichkeit einer solchen projectiven Transformation einer reellen Ebene π in eine andere π_1, dass die reellen Punkte von π, welche durch einen gewissen Punkt und eine gewisse Grade harmonisch getrennt werden, in conjugirt imaginäre Punkte von π_1 übergehen, und umgekehrt. Diesen Fall hat man z. B., wenn man einen reellen Kegelschnitt durch eine imaginäre Collineartransformation in sich transformirt.

Ich gehe jetzt dazu über zu untersuchen inwiefern zweidimensionale Ketten durch eine gegebene projective Transformation in sich übergehen können. Hierdurch wird zugleich entschieden, ob die allgemeine Projectivität durch eine projective Transformation in eine solche Projectivität transformirt werden kann, in welcher das jedem reellen Elemente entsprechende Element wieder reell ist; eine solche Transformation selbst kann man (sowie auch die zugehörige Projectivität) reell nennen. Um dies zu untersuchen denken wir uns erst, dass die Projectivität drei Doppelpunkte E, F, G hat, von welchen nicht zwei zusammenfallen. Wenn nun K^{II} eine Doppelkette in der Projectivität sein soll, werden denjenigen Punkten, welche in Bezug auf K^{II} symmetrisch liegen, wieder solche Punkte entsprechen; desshalb müssen entweder alle drei Punkte EFG in K^{II} liegen, oder auch nur der eine Punkt E, während die zwei anderen in Bezug auf K^{II} symmetrisch liegen.

Es seien nun PP_1 und QQ_1 zwei Punktpaare in der Projectivität; man hat dann

$$E(FGPQ) \overline{\wedge} E(FGP_1Q_1)$$

und

$$F(EGPQ) \,\overline{\wedge}\, F(EGP_1Q_1).$$

Aus diesen folgen:

$$E(FGPP_1) \,\overline{\wedge}\, E(FGQQ_1)$$

und

$$F(EGPP_1) \,\overline{\wedge}\, F(EGQQ_1).$$

Wenn demnach $EE.FF.GG.PP_1.QQ_1$ Paare in einer gewissen Projectivität sind, werden $EE.FF.GG.PQ.P_1Q_1$ Paare in einer anderen Projectivität sein. Ist nun K^{II} eine selbstentsprechende Kette und P ein Punkt dieser Kette, werden demnach nicht nur $EFGPP_1$, sondern auch, wenn QQ_1 ein beliebiges neues Paar ist, $EFGQQ_1$ in einer Kette liegen. Ebenso werden QQ_1 in einer durch E gehenden und F und G harmonisch trennenden Kette liegen, wenn dies für ein Punktpaar PP_1 gilt. Man hat also:

Es giebt in einer Projectivität im Allgemeinen keine oder auch unendlich viele Doppelketten.

Ein für alle Mal bemerke ich, dass ein Satz wie dieser sich auch wie folgt ausdrücken lässt:

Man kann durch keine oder durch zweifach unendlich viele wesentlich verschiedene Lineartransformationen eine allgemeine Projectivität in eine reelle transformiren.

Wesentlich verschieden sind hier diejenigen Transformationen, welche nicht durch eine reelle Transformation in einander übergehen können.

Beide Systeme von Doppelketten werden sich im Allgemeinen nicht vorfinden. Wenn nämlich durch E, P und P_1 zwei Ketten gehen, von welchen die eine F und G enthält, während die andere F und G harmonisch trennt, werden die zwei Ketten orthogonal sein müssen, und zwar so, dass der isolirte gemeinsame Punkt der Ketten in FG liegt (S. 11). Die anderen gemeinsamen Punkte E, P und P_1 werden deshalb in einer einfachen Kette, also jedenfalls in einer Graden liegen, d. h. die gegebene Projectivität wäre in diesem Falle eine Centralcollineation.

Wenn man nun die Centralcollineation direct betrachtet, sieht man wie oben, dass eine Doppelkette nothwendig das Collineationscentrum E enthalten und der Axe e adjungirt sein muss. Auch hier wird sich im

Allgemeinen keine Doppelkette vorfinden, dagegen unendlich viele, wenn das charakteristische Doppelverhältniss reell ist, denn sind PP_1, P_1P_1' zwei Paare in der Collineation, und schneidet die Grade PP_1 die Axe e in Q, müssen $EQPP_1P_1'$ Punkte einer und derselben einfachen Kette sein; die Doppelketten sind offenbar alle diejenigen, welche E und eine beliebige in e liegende einfache Kette enthalten. Es giebt demnach hier *eine vierfach unendliche Menge von Doppelketten.* Die Bestimmung wird nur dann illusorisch, wenn E in e liegt.

Ich werde nun den Fall behandeln, dass zwei der Doppelpunkte EFG oder auch alle drei zusammenfallen. Wenn erstens nur F und G in F zusammenfallen, muss eine Doppelkette nothwendigerweise E und eine in $e = FG$ liegende und durch F gehende einfache Kette enthalten. Man hat nun den bekannten Satz, dass, wenn MM_1, M_1M_1' zwei Paare in einer Projectivität im einförmigen Gebiete sind, in welcher die Doppelelemente in O zusammenfallen, dann OMM_1M_1' vier harmonische Elemente sind; demnach werden, wenn PP_1, P_1P_1' zwei Paare in der hier betrachteten Projectivität sind, EF, EP, EP_1, EP_1' vier harmonische Graden sein. Dagegen wird das Doppelverhältniss der Graden FE, FP, FP_1, FP_1' im Allgemeinen nicht reell sein. Desshalb findet sich hier im Allgemeinen keine zweidimensionale Doppelkette, wenn aber eine dann zweifach unendlich viele.

Anders verhält es sich, wenn alle drei Doppelpunkte in einen Punkt E zusammenfallen. Dann müssen auch die drei Doppelgraden efg in eine Grade e zusammenfallen; wenn nämlich nicht, würde die Collineation eine Centralcollineation sein, in welcher das Centrum E in der Axe e läge. Schliessen wir für einen Augenblick diesen Fall aus, und seien wieder PP_1 und P_1P_1' zwei Paare in der Collineation. Wenn nun durch P eine Doppelkette K^{II} geht, wird diese durch EPP_1P_1' bestimmt sein. Weil aber e, EP, EP_1, EP_1' vier harmonische Graden sind, wird e der Kette adjungirt sein, und deshalb werden auch die Punkte $Q = (e \,.\, PP_1)$ und $Q_1 = (e \,.\, P_1P_1')$ in K^{II} liegen. E, Q und Q_1 bestimmen aber in e eine einfache Kette, welche in der Collineation sich selbst entspricht, weil der entsprechende Punkt Q_1' zu Q_1 mit EQQ_1 zusammen vier harmonische Punkte bilden. Die Kette K^{II} ist also wirklich eine Doppelkette, weil sie mit der entsprechenden die Punkte $EP_1P_1'Q_1'$ gemein hat. Es giebt demnach in diesem Falle *immer eine zweifach unendliche Menge von Doppelketten.*

Es steht nur noch zurück die Doppelketten in einer Centralcollineation zu bestimmen, deren Centrum E und Axe e incident sind. Man sieht hier leicht unmittelbar, dass jede zweidimensionale Kette, welche zwei beliebige entsprechende Punkte P und P_1 sowie zwei beliebige Punkte von e enthält — und nur eine solche — eine Doppelkette sein wird. Es giebt demnach hier wie in der allgemeinen Centralcollineation, dessen Doppelverhältniss reell ist, *immer vierfach unendlich viele Doppelketten.*

Es mag an dieser Stelle eine besondere Bestimmung einer projectiven — oder wenn man will, symmetralen — Transformation erwähnt werden, welche die besondere Stellung der reellen Punkte innerhalb der Sammlung aller Punkte einer reellen Ebene scharf hervorhebt. Es seien zur Bestimmung einer projectiven Transformation drei Paare von entsprechenden Punkten AA_1, BB_1, CC_1 gegeben; dadurch wird eine vierfach unendliche Menge von Transformationen bestimmt. Wenn in zwei von diesen M_1M_1', N_1N_1' die zwei festen Punkten M und N entsprechenden sind, werden $A_1B_1C_1M_1N_1$ und $A_1B_1C_1M_1'N_1'$, also nach dem obigen auch $A_1B_1C_1M_1M_1'$ und $A_1B_1C_1N_1N_1'$ einander in einer gewissen Collineation entsprechen. Die Systeme von Punkten, welche in allen den gegebenen Systemen zwei festen Punkten entsprechen, werden also unter sich projectiv sein. Weil nun zwei zweidimensionale Ketten im Allgemeinen einen oder drei Punkte gemein haben, schliesst man:

Wenn zur Bestimmung einer in einer reellen Ebene liegenden Projectivtransformation drei Paare von entsprechenden Punkten gegeben sind, und ausserdem noch, dass die zwei festen Punkten entsprechenden reell sein sollen, so werden hierdurch im Allgemeinen drei oder auch eine Transformation bestimmt.

Die Zahl der Lösungen kann auch einfach oder zweifach unendlich werden, aber selbst das letztere besagt noch keineswegs, dass die Aufgabe vollständig unbestimmt ist.

Ich gehe jetzt zur näheren Untersuchung der Symmetraltransformation einer Ebene über. Um diese fördern zu können wird es jedoch erst nothwendig sein die Symmetraltransformation in einem einförmigen Gebiete zu untersuchen. Als solche nehme ich eine Grade, deren Punkte symmetral gepaart werden; diese Abhängigkeit ist, wie aus der Definition

folgt, durch drei Paare von entsprechenden Punkten bestimmt. Wir suchen nun die Punkte, welche durch die Transformation PP_1 in sich übergehen. Entspricht dem Punkte P_1 wieder ein neuer Punkt P_1', so bilden die Paare PP_1' eine Projectivität; das Paar von Doppelpunkten E und F in dieser wird auch ein Doppelpaar in der gegebenen Symmetralität bilden, weil diese sonst involutorisch sein würde — ein Fall, den wir nachher behandeln. Dies ist aber auf doppelte Weise möglich: entweder werden E und E, F und F oder auch E und F, F und E entsprechende Punkte sein d. h.

Durch eine Symmetraltransformation einer Graden in sich werden entweder zwei oder auch kein Punkt in sich transformirt; im letzten Falle giebt es ein (und nur ein) *Paar von Punkten, die sich umgetauscht entsprechen.*

Die zwei Doppelpunkte einer Symmetralität können auch zusammenfallen; man sieht leicht, dass die Symmetralität auch durch ein Paar PP_1 und einen Punkt E, in welchen die zwei Doppelpunkte zusammenfallen, vollständig bestimmt ist.

Es bleibt noch die Möglichkeit zu untersuchen, dass P und P_1' identisch zusammenfallen, in welchem Falle die Symmetralität PP_1 involutorisch ist. Sind nun PP_1 und QQ_1 zwei Punktpaare in einer involutorischen Symmetralität, so hat man, wenn ich $\underline{\vee}$ als Zeichen der symmetralen Beziehung wähle,

(1) $$(PP_1QQ_1) \,\underline{\vee}\, (P_1PQ_1Q),$$

also auch

(2) $$(PP_1QQ_1) \,\underline{\vee}\, (PP_1QQ_1).$$

In der durch die Paare $PP.P_1P_1.QQ$ bestimmten neuen Symmetralität, wird die durch PP_1Q gehende einfache Kette k Punkt für Punkt sich selbst entsprechen, während — wie man direct aus der Definition der symmetralen Abhängigkeit schliesst — zwei beliebige entsprechende Punkte durch k harmonisch getrennt sind. Desshalb muss auch der Punkt Q_1, der nach (2) ein weiterer Doppelpunkt ist, in k liegen. Die involutorische Symmetralität ist also nicht wie die involutorische Projectivität durch zwei beliebig gegebene Punktpaare bestimmt, sondern nur durch solche, welche einer und derselben einfachen Kette angehören.

Wenn umgekehrt PP_1, QQ_1 vier Punkte einer Kette sind, wird die durch die Paare $PP_1 . P_1P . QQ_1$ bestimmte Symmetralität noch das Paar QQ enthalten und involutorisch sein, denn, wenn R ein beliebiger Punkt der Graden ist, folgt aus

$$(PP_1 QQ_1) \veebar (P_1 PQ_1 Q)$$

und

$$(PP_1 QR) \veebar (P_1 PQ_1 R_1)$$

zugleich

$$(PP_1 Q_1 R) \veebar (P_1 PQR_1)$$

Wenn nun PP_1 und QQ_1 in k einander nicht trennen, giebt es in k zwei Punkte E_1 und E_2, welche in der gegebenen Symmetralität Doppelpunkte sind; innerhalb einer Kette ist nämlich eine symmetrale Beziehung von einer projectiven nicht verschieden, so dass $E_1 E_2$ die Punkte sind, welche PP_1 und QQ_1 harmonisch trennen. Legt man ferner eine Kette durch E_1 und ein neues Paar von entsprechenden Punkten, wird es in dieser ausser E_1 noch einen anderen Doppelpunkt E_3 geben. Die durch $E_1 E_2 E_3$ gehende Kette k^0 wird in der gegebenen Symmetralität Punkt für Punkt sich selbst entsprechen, und zwei beliebige entsprechende Punkte werden durch diese feste Kette harmonisch getrennt. Weil incidente Punktreihen nur dann als symmetral gepaart aufgefasst werden können, wenn sie in einer und derselben einfachen Kette liegen, giebt es ausserhalb k^0 keinen Doppelpunkt.

Wenn dagegen PP_1 und QQ_1 sich in k trennen, wird es überhaupt keine Doppelpunkte geben können. Man hat also:

Die involutorische Symmetraltransformation einer Graden in sich ist durch zwei Punktpaare bestimmt, insofern diese einer und derselben einfachen Kette angehören. Es giebt entweder keinen selbstentsprechenden Punkt oder auch unendlich viele, welche eine einfache Kette füllen.

Nach dem obigen giebt es, wenn AA_1, BB_1 zwei Paare einer involutorischen Symmetralität sind, in der durch diese Punkte gehenden Kette k zwei Doppelpunkte, wenn die Symmetralität überhaupt Doppelpunkte hat, und umgekehrt. Wenn dies nicht der Fall ist, kann man dagegen ein aber auch nur ein Paar von entsprechenden Punkten CC_1 bestimmen, welche zugleich in Bezug auf k symmetrisch liegen. Sind

nämlich in der gegebenen Symmetralität PP_1 zwei beliebige entsprechende Punkte, und P_1' der Punkt, der in Bezug auf k symmetrisch zu P_1 liegt, so werden die Paare PP_1' eine Projectivität bilden, in der die Kette k sich selbst entspricht, und deren Doppelpunkte CC_1 daher entweder in k liegen oder durch diese harmonisch getrennt sind. Das erstere findet hier nicht Statt, weil sonst auch die Symmetralität dieselben Punkte als Doppelpunkte haben würde, und dies wurde eben ausgeschlossen.

Es sei noch bemerkt, dass eine involutorische Symmetralität obgleich im Allgemeinen durch zwei Paare bestimmt dennoch nicht durch zwei Doppelpunkte (sondern erst durch drei) bestimmt ist.

Man sieht, dass eine involutorische Symmetralität unendlich viele Doppelketten hat, nämlich ausser der (eventuell existirenden) Kette der selbstentsprechenden Punkte — der Grundkette — noch jede durch ein Paar von entsprechenden Punkten gehende Kette.

Indem ich jetzt dazu übergehe die Doppelketten in einer allgemeinen Symmetralität zu bestimmen, müssen erst die Doppelketten in einer allgemeinen Projectivität gefunden werden. Man sieht aber ganz wie S. 15, dass durch eine projective Transformation im Allgemeinen keine Kette in sich übergeht, in speciellen Fällen jedoch unendlich viele, welche entweder alle durch die Doppelpunkte E und F gehen oder alle durch diese harmonisch getrennt werden. Beide Reihen finden sich nur dann, wenn die Transformation involutorisch ist. Fallen die Doppelpunkte in einen zusammen, so wird jede durch diesen Punkt und noch ein beliebiges Paar von entsprechenden Punkten gehende Kette in sich übergehen.[1]

Entspricht nun in einer Symmetralität dem Punkte P ein Punkt P_1, diesem wieder ein Punkt P_1', so werden die Paare PP_1' eine Projectivität bilden. Eine Doppelkette in der Symmetralität PP_1 muss auch in der Projectivität PP_1' eine Doppelkette sein. Wenn nun die Projectivität allgemein wäre, würde es nach dem obigen auch in einer allgemeinen Symmetralität keine Doppelkette geben. Man kann aber zeigen, dass die Projectivität PP_1' stets von specieller Natur ist.

Wir nehmen erst an, dass die Symmetralität zwei Doppelpunkte E und F besitzt, und haben dann:

$$(EFPP_1) \veebar (EFP_1P_1') \overline{\wedge} (FEP_1'P_1).$$

[1] Vgl. v. Staudt, *Beiträge* No. 243.

Die durch $EF.FE.PP_1'$ bestimmte Symmetralität muss involutorisch sein, weil sie ausser dem involutorischen Paare EF noch einen Doppelpunkt P_1 hat. Es ist also

$$(EFPP_1') \veebar (FEP_1'P)$$

oder

$$(EFPP_1') \veebar (EFPP_1'),$$

und diese sagt eben, dass $EFPP_1'$ in einer und derselben Kette k liegen. In dieser Kette werden die Paare EF und PP_1' einander nicht trennen, weil P_1 ein Doppelpunkt der involutorischen Symmetralität ist.

Die Doppelketten in der Symmetralität PP_1 müssen also nothwendigerweise durch E und F gehen. Eine explicite Bestimmung dieser Ketten erhält man am besten, wenn zuerst die Frage etwas umgestellt wird.

Wenn nämlich durch eine symmetrale Transformation PP_1 eine Kette k in sich übergeht, wird die involutorische Symmetralität, in welcher die Punkte von k Doppelpunkte sind, auch in sich übergehen. Eben weil die neue Symmetralität involutorisch ist, kann man aber auch sagen, dass diese durch die gegebene Transformation in ihre inverse übergehe. Wir werden demnach zuerst diejenigen Symmetralitäten suchen, welche durch die Transformation PP_1 in ihre inversen übergehen, und nachher prüfen, ob diese auch involutorisch sind.

Wenn wie angenommen E und F in der Symmetralität PP_1 Doppelpunkte sind, können wir uns die Aufgabe dadurch erleichtern, dass wir von vorne herein wissen, dass eine Doppelkette durch E und F gehen muss. Wir werden daher nur diejenigen Symmetralitäten der genannten Art zu bestimmen suchen, in welchen E und F Doppelpunkte sind. Werden nun die Punkte P und N in P_1 und N_1 transformirt, so kommt es, indem P und P_1 fest genommen werden, darauf an N und N_1 so zu bestimmen, dass die Symmetralitäten $EE.FF.PN$ und $EE.FF.P_1N_1$ invers sind, d. h. so dass $EE.FF.PN.N_1P_1$ Paare in einer und derselben Symmetralität sind. Wenn dies der Fall ist, müssen

(1) $$(EFPN_1) \veebar (EFNP_1)$$

und

(2) $$(EFPN) \veebar (EFP_1N_1)$$

gleichzeitig bestehen. Zur Bestimmung von N_1 ziehe man noch das Paar $P_1 P_1'$ zu Hilfe. Es ist dann:

$$(3) \qquad (EFP_1 N) \veebar (EFP_1' N_1).$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$(EFP_1' N_1) \overline{\wedge} (EFN_1 P) \overline{\wedge} (FEPN_1).$$

N_1 ist also der eine oder der andere von denjenigen Punkten N_1^1 und N_1^2, welche EF und PP_1' harmonisch trennen.

Die zwei gefundenen Symmetralitäten

$$EE.FF.N_1^1 P_1 \ldots \text{ und } EE.FF.N_1^2 P_1 \ldots$$

müssen involutorisch sein, weil es nach dem obigen überhaupt nur zwei Symmetralitäten von der betrachteten Art giebt, welche in ihre inversen übergehen, und sich sonst vier solche gefunden hätten, nämlich diejenigen, welche die Paare $P_1 N_1^1$; $N_1^1 P_1$; $P_1 N_1^2$; $N_1^2 P_1$ enthalten. Hierbei ist freilich vorausgesetzt, dass die zwei gefundenen Symmetralitäten nicht unter sich invers sind, d. h. dass nicht

$$(EFN_1^2 P_1) \veebar (EFP_1 N_1^1).$$

Wenn dies aber der Fall wäre, müsste wegen $(EFN_1^2 P_1) \veebar (FEN_1^1 P_1)$ die Paare $EF.N_1^1 N_1^2$ eine involutorische Symmetralität bestimmen, in welcher P_1 ein Doppelpunkt wäre; in der durch $EFN_1^1 N_1^2$ gehenden Kette müsste dann auch ein Doppelpunkt liegen; dies ist aber unmöglich, weil EF und $N_1^1 N_1^2$ einander (harmonisch) trennen.

In jeder der gefundenen involutorischen Symmetralitäten giebt es eine Grundkette, weil E und F Doppelpunkte derselben sind. Wir haben also ganz explicite zwei Ketten k und k_1 bestimmt, welche durch die gegebene symmetrale Transformation in sich übergehen: sie gehen beide durch E und F und die eine trennt P_1 und N_1^1, die andere P_1 und N_1^2 harmonisch.

Wenn in derjenigen der gefundenen Symmetralitäten, in welcher k eine Grundkette ist, der Kette k_1 eine Kette k_2 entspricht, wird auch diese durch die gegebene Transformation in sich übergehen müssen; weil es, aber überhaupt nur zwei solche Ketten giebt, muss k_2, weil sie von k

verschieden ist, nothwendigerweise mit k_1 zusammenfallen, d. h. k und k_1 müssen ein Paar von Orthogonalketten bilden:

In einer Symmetralität mit zwei Doppelpunkten giebt es zwei Doppelketten, welche unter sich orthogonal sind.

Wenn die zwei Doppelpunkte in einen Punkt E zusammenfallen, wird es nur eine Doppelkette geben. Sind wieder PP_1, P_1P_1' Paare von entsprechenden Punkten, und EN_1 durch PP_1' harmonisch getrennt, so wird diejenige Kette, welche durch E geht und P_1 und N_1 harmonisch trennt, die gesuchte sein.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, wo die Transformation PP_1 zwei Punkte E und F vertauscht in sich überführt. Man hat hier mit den früheren Bezeichnungen

$$(EFPP_1) \veebar (FEP_1P_1') \overline{\wedge} (EFP_1'P_1).$$

Die durch die Paare $EE.FF.PP_1'$ bestimmte Symmetralität muss also involutorisch sein, weil sie drei Doppelpunkte EFP_1 hat. Daraus folgt wieder:

$$(PP_1'EF) \veebar (P_1'PEF) \overline{\wedge} (PP_1'FE).$$

Die Symmetralität $PP.P_1'P_1'.EF\ldots$ muss dann auch involutorisch sein, weil sie ausser den zwei Doppelpunkten P und P_1' noch ein involutorisches Paar hat. Es geht demnach durch P und P_1' eine Kette, welche E und F harmonisch trennt, nämlich die Kette der Doppelpunkte in der letzterwähnten Symmetralität. Man ersieht hieraus, dass die durch Iteration der Transformation PP_1 gebildete projective Transformation PP_1' jede Kette, welche E und F harmonisch trennt, in sich transformirt.

Um die nähere Bestimmung der Doppelketten in der Symmetralität zu erhalten, stelle man wie oben die Frage um, und suche die Symmetralitäten, welche durch die Transformation PP_1 in ihre inversen übergehen. Weil eine Doppelkette dem obigen zufolge jedenfalls E und F harmonisch trennen muss, setzen wir gleich voraus, dass EF und FE Paare in der gesuchten Symmetralität sind. Es sind dann wie in dem obigen Falle, zwei solche Punkte N und N_1 zu bestimmen, so dass gleichzeitig

(1) $$(EFPN_1) \veebar (FENP_1),$$

und

(2) $$(EFPN) \veebar (FEP_1N_1)$$

Statt finden. Nimmt man noch das Paar P_1P_1' zu Hilfe, so hat man

(3) $$(EFP_1N) \veebar (FEP_1'N_1),$$

und aus (1) und (3)

$$(FEP_1'N_1) \overline{\wedge} (FEN_1P) \overline{\wedge} (EFPN_1).$$

N_1 wird also der eine oder der andere der Punkte N_1^1 und N_1^2 sein, welche EF und PP_1' harmonisch trennen.

Es giebt demnach auch in diesem Falle zwei Symmetralitäten

$$EF.N_1^1P_1\ldots \text{ und } EF.N_1^2P_1\ldots,$$

welche in sich übergehen. Hieraus folgt schon, dass diese involutorisch sind; ich will dies jedoch hier direct zeigen, weil daraus zugleich ersichtlich wird, dass nur die eine derselben Doppelpunkte hat. Nach den obigen Bemerkungen S. 23 bestimmen die Paare $EE.FF.PP_1'$ eine involutorische Symmetralität Σ_1, deren Doppelpunkte in einer durch E, F und P_1 gehende Kette k_1 liegen, und zugleich die Paare $PP.P_1'P_1'.EF$ eine andere involutorische Symmetralität Σ_2, deren Doppelpunkte in einer durch P und P_1' gehenden und EF harmonisch trennenden Kette k_2 liegen. Diejenigen Doppelpunkte von Σ_1, welche in k_2 liegen, werden P P_1' harmonisch trennen und zugleich in k_1 liegen weil k_1 alle Doppelpunkte von Σ_1 enthält — und diejenigen Doppelpunkte von Σ_2, welche in k_1 liegen, werden E und F harmonisch trennen und zugleich in k_2 liegen weil k_2 alle Doppelpunkte von Σ_2 enthält. Daraus erhellt, dass k_1 und k_2 zwei Punkte gemein haben, welche grade die oben gesuchten Punkte N_1^1 und N_1^2 sind. Weil demnach $EFP_1N_1^1N_1^2$ Punkte derselben Kette sind, hat man:

$$(EFP_1N_1^1) \veebar (EFP_1N_1^1),$$

also auch

$$(EFP_1N_1^1) \veebar (FEN_1^1P_1),$$

woraus ersichtlich ist, dass $EF.FE.P_1N_1^1$ (und ebenso $EF.FE.P_1N_1^2$) wie verlangt eine involutorische Symmetralität bestimmen.

Weil $EFN_1^1N_1^2$ vier harmonische Punkte einer Kette k_1 sind, in welcher auch P_1 liegt, werden von den Paaren $P_1N_1^1$ und $P_1N_1^2$ das eine die Punkte E und F trennen, das andere aber nicht; desshalb hat nur die eine der gefundenen Symmetralitäten in k_1, also überhaupt, Doppelpunkte, d. h.:

In einer Symmetralität, welche ein involutorisches Paar hat, giebt es eine und nur eine Doppelkette.

Man zeigt an dieser Stelle leicht, dass jede projective und symmetrale Transformation eines einförmigen Gebildes in sich durch eine Reihe von involutorischen Symmetraltransformationen ersetzt werden kann. Ich betrachte erst eine Symmetraltransformation PP_1. Wird durch diese eine Kette k_0 in sich transformirt, und liegt P' zu P symmetrisch in Bezug auf k_0, so bestimmen die Paare $P'P_1$ eine Projectivität, in der k_0 und also unendlich viele Ketten sich selbst entsprechen. Es seien diese erstens diejenigen, welche durch die Doppelpunkte E und F gehen. Wir denken uns nun P und P' als feste Punkte von k_0 und bestimmen den symmetrischen Punkt P'' zu P' in Bezug auf eine beliebige aber feste Kette, welche E und F harmonisch trennt und demnach zu k_0 orthogonal ist. Weil desshalb E, F, P_1 und P'' alle in derselben einfachen Kette k_0 liegen, kann man dem obigen zufolge eine involutorische Symmetralität bestimmen, in der EF und P_1P'' zwei Paare sind. Die gegebene Transformation PP_1 kann also, weil sie durch E, F und ein beliebiges Paar von entsprechenden Punkten bestimmt ist, durch drei involutorische ersetzt werden. Diese werden bzw. durch die folgenden Paare bestimmt

$$EE.FF.PP' \,;\; EF.FE.P'P'' \,;\; EF.FE.P''P_1.$$

Wenn die gegebene Symmetraltransformation ein Paar EF vertauscht in sich transformirt, kann man ganz ähnlich verfahren, und hat allgemein:

Jede symmetrale Transformation kann durch drei involutorische ersetzt werden.

Hieraus folgt unmittelbar:

Jede projective Transformation kann durch vier involutorische Symmetraltransformationen ersetzt werden.

Man schliesst nämlich gleich aus dem obigen, dass durch zwei in-

volutorische Symmetraltransformationen nicht die allgemeine projective Transformation erzeugt wird, sondern nur eine solche, welche unendlich viele Ketten in sich transformirt.

Ich werde jetzt wieder zur Geometrie der Ebene zurückkehren und die in einer solchen liegenden Symmetralitäten untersuchen. Hier treten im wesentlichen dieselben Probleme auf, welche schon im eindimensionalen Gebiete erledigt sind, und es lassen sich auch diese mittels des vorhergehenden leicht behandeln.

Zuerst sollen die Punkte gesucht werden, welche durch eine symmetrale Transformation PP_1 einer Ebene in sich selbst in sich übergehen. Entspricht dem Punkte P_1 ein Punkt P_1', so bilden die Paare PP_1' eine Collineation, welche im Allgemeinen drei Doppelpunkte EFG hat. Diese Gruppe von drei Punkten wird auch durch die symmetrale Transformation PP_1 in sich übergehen. Wenn dies nämlich nicht der Fall wäre, so dass z. B. G in G_1 transformirt würde, so würde die Symmetralität PP_1 vier involutorische Paare etwa EE, FF, GG_1, G_1G haben und demnach überhaupt involutorisch sein, ein Fall, den wir nachher betrachten werden. Die Punktgruppe EFG kann aber entweder so in sich übergehen, dass (mit angemessenen Bezeichnungen) $EE.FF.GG$, oder so, dass $EE.FG.GF$ Paare in der durch die Transformation bestimmten (zweidimensionalen) Symmetralität sind. Beide Möglichkeiten sind gleich allgemein; eine Symmetralität PP_1 der letzteren Art erhält man z. B. wenn PQ Paare in einer Collineation sind, deren Doppelpunkte EFG sind, und ferner Q und P_1 symmetrisch in Bezug auf eine feste zweidimensionale Kette liegen, welche durch E geht und F und G harmonisch trennt.

Speciell können die Paare PP_1' auch eine Centralcollineation bilden. Ist E das Centrum, e die Axe derselben, so wird durch die Symmetraltransformation PP_1 e involutorisch in sich transformirt. Es entspricht desshalb in PP_1 ausser E kein Punkt sich selbst oder auch noch alle Punkte einer in e liegenden einfachen Kette. Man hat also:

Eine nicht involutorische Symmetralität hat entweder drei Doppelpunkte oder auch einen Doppelpunkt in Verbindung mit einem involutorischen Paare. Speciell kann die Symmetralität ausser einem Doppelpunkte noch unendlich viele involutorische Paare enthalten, welche dann in einer Graden liegen.

Das Verhalten der Doppelgraden folgt hieraus mittels des Dualität-

princips. Wenn die Symmetralität PP_1 involutorisch ist, wird die Beziehung PP_1' identisch. Es seien AA_1 und BB_1 zwei nicht in derselben Graden liegende Paare von Punkten in einer involutorischen Symmetralität. Es ist dann eine zweidimensionale Kette K^{II} eindeutig bestimmt, welche A und A_1, B und B_1 harmonisch trennt. Ist nun P ein beliebiger Punkt der Ebene, P_1 der zu P in der Symmetralität entsprechende Punkt, P' der Punkt der zu P in Bezug auf K^{II} symmetrisch liegt, so bilden die Paare PP' eine Collineation; diese muss nothwendig identisch sein, weil P mit P' in jedem der Punkte A, A_1, B und B_1 zusammenfällt. Man hat also:

Wenn eine zweidimensionale Symmetralität involutorisch ist, werden entsprechende Punkte durch eine feste zweidimensionale Kette (deren Punkte Doppelpunkte sind) harmonisch getrennt. Die Beziehung ist durch zwei beliebige getrennte Paare, welche nicht in derselben Graden liegen, vollständig bestimmt.

Ausser der Kette der Doppelpunkte — der Grundkette — geht durch eine involutorische Symmetraltransformation noch jede Kette in sich über, welche zur ersteren orthogonal ist.

Es sollen nun die zweidimensionalen Doppelketten in einer allgemeinen Symmetralität bestimmt werden, und ich setze erst voraus, dass diese drei (und nur drei) getrennte Doppelpunkte E, F und G hat. Entspricht dem Punkte P ein Punkt P_1, diesem wieder ein Punkt P_1', werden die gesuchten Doppelketten auch Doppelketten in der Collineation PP_1' sein. Eine gesuchte Doppelkette muss desshalb dem vorhergehenden zufolge entweder durch alle drei Punkte E, F und G gehen oder nur durch den einen, während sie die zwei anderen harmonisch trennt. Eine Kette der ersteren Art hat mit EF sowie mit EG eine einfache Kette von Punkten gemein. Durch die Transformation PP_1 geht jede dieser Graden z. B. EF so in sich über, dass dabei zwei getrennte Doppelpunkte E und F auftreten. Es giebt demnach in EF zwei einfache Ketten k^1 und k^2, in EG zwei andere solche Ketten k_1 und k_2, welche in sich transformirt werden. Weil nun eine zweidimensionale Kette durch zwei einfache Ketten, welche einen Punkt gemein haben, vollständig bestimmt ist, sind hier vier Ketten gefunden, welche durch die Transformation PP_1 in sich übergehen, nämlich diejenigen, welche durch k^1k_1, k^2k_1, k^1k_2, k^2k_2

bestimmt sind. Weil k^1 und k^2, k_1 und k_2 bzw. orthogonal sind, werden auch je zwei der gefundenen zweidimensionalen Ketten gegenseitig orthogonal sein. Ausser diesen kann keine andere durch EFG gehende Kette Doppelkette sein; dagegen wäre noch Doppelketten möglich, welche z. B. durch E gehen und F und G harmonisch trennen. Diese neuen Ketten würden dann aber auch in der Collineation PP_1' Doppelketten sein, und dann müssten, wie früher bewiesen, die Paare PP_1' eine Centralcollineation bilden, wass mit dem im Streite ist, dass der Symmetralität drei und nur drei Doppelpunkte zugeschrieben wurden:

Eine zweidimensionale Symmetralität, mit drei (aber auch nur drei) Doppelpunkten, enthält vier zweidimensionale Doppelketten, von welchen je zwei unter sich orthogonal sind.

Fallen zwei der Doppelpunkte z. B. F und G zusammen, so findet sich in der Graden FG nur eine einfache Doppelkette. Die zweidimensionale Symmetralität hat dann in dem Falle auch nur zwei Doppelketten. Fallen alle drei Doppelpunkte zusammen ohne dass auch die Doppelgraden zusammenfallen, wird die durch Iteration erzeugte Collineation PP_1' eine Centralcollineation sein müssen, in welcher Axe und Centrum incident sind, ein Fall, den wir nachher betrachten. Fallen aber die Doppelpunkte und die Doppelgraden gleichzeitig zusammen, wird es nur eine Doppelkette geben.

Um die Doppelketten zu bestimmen, wenn die Symmetralität ein involutorisches Paar hat, muss man einen anderen Weg einschlagen, der übrigens auch im ersten Falle zum Ziele geführt haben würde. Man benutzt hier bequem den direct aus den Definitionen folgenden Satz:

Die Schnittpunkte entsprechender Graden in zwei symmetral gepaarten Gradenbüscheln bilden, wenn diese eine entsprechende Grade gemein haben, eine zweidimensionale Kette.

Sind die Büschel $mnp\ldots$ und $mn_1p_1\ldots$, so wird die durch (nn_1) und (pp_1) gehende und (np_1) und (n_1p) harmonisch trennende Kette die im Satze genannte sein.

Man hätte diesen Satz gradezu als Definition der zweidimensionalen Kette benutzen und dadurch die Lehre von den Ketten in die der Symmetraltransformationen hineinziehen können. Hier werden wir sie dazu be-

nutzen diejenigen Doppelketten in einer mit einem (und nur einem) involutorischen Paare FG versehenen Symmetralität zu bestimmen, welche F und G harmonisch trennen und ausserdem noch durch den Doppelpunkt E gehen. Es sei K^{II} eine solche Doppelkette. Eine beliebige feste durch F gehende Grade m muss dann einen (noch nicht bekannten) Punkt M mit K^{II} gemein haben. Der Graden m entspreche in der Symmetralität eine durch G gehende Grade $m_1 = n$, dieser wiederum eine durch F gehende Grade n_1. Entspricht ferner dem Punkte M ein Punkt M_1, so wird auch dieser in K^{II} liegen, und GM_1 wird mit m_1 identisch sein. Die Grade GM nennen wir r, die entsprechende FM_1 sei r_1. Werden nun EF, EG, FG resp. g, f, e genannt, so hat man, weil F und G durch K^{II} harmonisch getrennt werden,

$$(egmr_1) \veebar (efrm_1),$$

und ferner

$$(efnr) \veebar (egn_1r_1).$$

Aus diesen folgt, weil $m_1 = n$

$$(egn_1r_1) \overline{\wedge} (egr_1m) \overline{\wedge} (gemr_1),$$

d. h. r_1 ist ein Doppelstrahl in der Involution, in welcher eg und mn_1 zwei Paare sind. Aus r_1 wird r abgeleitet und der Schnittpunkt von r mit m giebt M. Die obigen Beziehungen in der umgekehrten Ordnung genommen zeigen direct, dass eine Kette, welche durch E und M geht und F und G harmonisch trennt, auch $M_1 = (m_1r_1)$ enthalten wird und demnach eine Doppelkette ist. Ausser den hierdurch bestimmten zwei Ketten könnte es noch Doppelketten geben, welche durch alle drei Doppelpunkte gehen. Dann würde aber die durch Iteration erzeugte Collineation eine centrische sein, und die gegebene Symmetralität demnach unendlich viele involutorische Paare enthalten. Weil es also nur zwei Doppelketten giebt, müssen diese nothwendigerweise unter sich orthogonal sein. Man hat also:

Eine zweidimensionale Symmetralität mit einem aber auch nur einem involutorischen Paare enthält zwei zweidimensionale Doppelketten, welche gegenseitig orthogonal sind.

Wir haben früher gesehen, dass es in einer Collineation im Allgemeinen keine Doppelketten giebt. Die durch Iteration einer allgemeinen

Symmetraltransformation erzeugte projective Transformation muss desshalb eine specielle sein; es folgt dies auch einfach aus den S. 23 gegebenen Sätzen über Symmetraltransformationen im einförmigen Gebiete.

Es steht jetzt nur noch übrig die Symmetralitäten PP_1^* zu behandeln, welche durch Iteration eine Centralcollineation erzeugen. Es giebt hier wie oben bemerkt zwei Möglichkeiten: entweder sind ausser einem immer existirenden Doppelpunkte E noch alle Punkte einer gewissen einfachen Kette k_0 (in einer Graden e) Doppelpunkte, oder es giebt ausser E keinen Doppelpunkt aber doch eine Grade e, deren entsprechende Punkte involutorisch gepaart sind.

Im ersteren Falle kann man in k_0 zwei beliebige Punkte F_1 und G_1 wählen, durch welche nach der Theorie der involutorischen Symmetralitäten im einförmigen Gebiete noch eine eindeutig bestimmte einfache Doppelkette k geht. In der Graden EF_1 liegen zwei einfache Ketten k^1 und k^2 aber auch keine mehr, denn die Transformation von EF_1 in sich kann nur dann involutorisch sein, wenn die Transformation PP_1 involutorisch ist. Verbindet man k (und die feste k_0) mit jeder der Ketten k^1 und k^2 erhält man zweidimensionale Doppelketten. Weil es in e zweifach unendlich viele einfache Doppelketten k giebt, finden sich auch zweifach unendlich viele zweidimensionale Doppelketten, nämlich zwei durch jede der Ketten k, und ausserdem noch zwei durch k_0. Ausser diesen kann es keine anderen geben, denn jede Doppelkette muss durch E gehen und eine einfache Doppelkette von e enthalten.

Auch in dem zweiten Falle, wo nur E ein Doppelpunkt ist, muss eine zweidimensionale Doppelkette eine in e liegende einfache Kette k enthalten. Es giebt dann in e ein aber auch nur ein Paar von entsprechenden Punkten E_1 und F_1, welche durch k harmonisch getrennt sind (s. S. 20). Man kann nun ganz wie oben S. 29 zwei durch k gehende zweidimensionale Doppelketten bestimmen, d. h. durch jede einfache Doppelkette in e gehen auch hier zwei Doppelketten K^{II}. Man hat also:

Jede Symmetralität, welche durch Iteration eine Centralcollineation erzeugt, enthält eine zweifach unendliche Menge von zweidimensionalen Doppelketten.

Es gilt dies auch, wenn das Collineationscentrum E der Axe e incident ist.

ÜBER DIE INTEGRATION
DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG
IN WELCHEN DIE UNABHÄNGIGE VERÄNDERLICHE NICHT VORKOMMT

VON

WALTHER RASCHKE.[1]

In dem Journal de l'École polytechnique (36e cahier) haben die Herren BRIOT und BOUQUET folgendes Theorem aufgestellt:

Wenn eine algebraische, irreductible Differentialgleichung zwischen u und $\frac{du}{dz}$, welche die Veränderliche z nicht explicite enthält, ein eindeutiges Integral besitzt, so müssen folgende nothwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Gleichung muss die Form haben:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

wenn $f_1(u)$, $f_2(u)$, ... ganze, rationale Functionen in u bedeuten, von

[1] Das Original der hier reproducirten Arbeit wurde im December 1887 von Herrn FUCHS der Redaction zum Abdruck übergeben. In Folge verschiedener Umstände, welche hauptsächlich mit der von König OSCAR II ausgeschriebenen Preisbewerbung in Verbindung stehen, ist es uns doch erst jetzt möglich geworden, für dieselbe Platz zu bereiten. Wir geben unten einige Worte wieder, welche Herr FUCHS der Abhandlung beizufügen die Güte hatte. *Der Hauptredacteur.*

Die vorliegende Arbeit ist der Inhalt einer Dissertation, auf Grund deren der Verfasser im Jahre 1883 von der philosophischen Facultät der Universität Heidelberg zum Doctor philosophiae promovirt worden ist. Leider wurde der talentvolle junge Mann im darauf folgenden Jahre in seiner Vaterstadt Danzig das Opfer eines Unglücksfalles. Die Arbeit enthält Gesichtspunkte, welche sowohl für die vorliegende Frage, als auch für andere welche über dieselbe hinausgehen, bemerkenswerth sind. Dieser Umstand wird, wie ich hoffe, in genügender Weise den Abdruck an dieser Stelle rechtfertigen. FUCHS.

denen $f_1(u)$ höchstens vom 2ten Grade, $f_2(u)$ höchstens vom 4ten Grade u. s. w., schliesslich $f_m(u)$ höchstens vom $2m^{\text{ten}}$ Grade ist.

2. Wenn $\frac{du}{dz}$ für den endlichen Werth $u = u_1$ nicht verschwindet, so muss es sich nach ganzen Potenzen von $(u - u_1)$ entwickeln lassen.

3. Verschwindet aber $\frac{du}{dz}$ für den endlichen Werth $u = u_1$, so muss in jeder Entwicklung von $\frac{du}{dz}$ nach $(u - u_1)$ der Exponent der niedrigsten Potenz von $(u - u_1)$ entweder gleich oder grösser als 1 sein, oder die Form haben $1 - \frac{1}{p}$, wenn p eine ganze, positive Zahl bedeutet.

4. Schliesslich muss die Differentialgleichung, welche man erhält, wenn in obige Gleichung $u = \frac{1}{w}$ gesetzt wird, für $w = 0$ dieselben Bedingungen erfüllen.

Herr Fuchs hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass es von Interesse sein würde, im Anschluss an ein Verfahren, welches Herr Hermite in seinen Vorlesungen an der École polytechnique 1874—75 an einzelnen Beispielen erläutert hat, eine algebraische Gleichung zwischen u und v zu Grunde zu legen, deren Veränderliche sich mit Hülfe eines Parameters x und einer Quadratwurzel aus einer ganzen Function in x von höchstens dem 4ten Grade ausdrücken lassen, und die Bedingungen dafür aufzustellen, dass diese Gleichung ein eindeutiges Integral hat, sobald $v = \frac{du}{dz}$ gesetzt wird, wie er es in einem Briefe an Hermite (Comptes rendus 1881, p. 1065) für den besonderen Fall der binomischen Gleichungen ausgeführt hat.

In der That ist es mir gelungen auf diesem Wege die Formen der Differentialgleichungen in Übereinstimmung mit den Resultaten von Briot und Bouquet abzuleiten (Abschnitt III dieser Arbeit).

Alle algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die unabhängige Variable nicht explicite enthalten, gehören in die Classe derjenigen algebraischen Gleichungen zwischen u und v, in welchen sich u und v als eindeutige Functionen eines Parameters z ausdrücken lassen und u eine algebraische Function von $\frac{du}{dz}$ ist. Von dieser Classe ist im Abschnitt I gezeigt, dass jede Veränderliche, als algebraische Function

der andern betrachtet, nur eine gewisse Anzahl von Verzweigungspunkten besitzen darf, so dass die algebraische Gleichung zwischen u und v ein Geschlecht hat, welches kleiner als zwei ist. Mit Hülfe des bekannten Satzes, dass in jeder Gleichung, deren Geschlecht kleiner als zwei ist, sich die Veränderlichen mit Hülfe eines Parameters x unter Adjunction einer Quadratwurzel, deren Radicand höchstens vom 4ten Grade in x ist, rational ausdrücken lassen, ergiebt sich, dass die Formen, welche in III aufgestellt sind, sämmtliche Formen unserer Differentialgleichung umfassen, die ein eindeutiges Integral besitzen. Für den eben erwähnten Satz ist im Abschnitt II ein analytischer Beweis gegeben, welcher auch für solche algebraische Gleichungen bestehen bleibt, deren Veränderliche mehrfache Verzweigungspunkte besitzen.

I.

Es sei

$$(1) \qquad f(u\,,\,U) = 0$$

eine algebraische irreductible Gleichung zwischen u und U. Wenn $U = \frac{du}{dz}$ gesetzt wird, so stellt dieselbe eine Differentialgleichung erster Ordnung dar, in welcher die Variable z explicite nicht vorkommt. Es wird angenommen, dass (1) ein Integral u besitzt, welches für endliche Werthe von z eindeutig ist.

Nach der Theorie der algebraischen Gleichungen lässt sich U für irgend einen endlichen Werth $u = a$ nach $u - a$ in folgender Form entwickeln:

$$(2) \qquad U = A_1(u - a)^{\frac{k+h}{k+1}} + A_2(u - a)^{\frac{k+h+1}{k+1}} + \ldots .$$

Hierin sind $A_1\,, A_2\,, \ldots$ Constanten, k und h bedeuten ganze Zahlen, von diesen kann $k + 1$ stets positiv angenommen werden, h kann positiv, auch negativ sein. Wenn $k > 0$ ist, so nennt man den Punkt $u = a$, welcher zur Entwicklung (2) gehört, einen k-fachen Verzweigungspunkt der alge-

braischen Function U. Wenn U für $u = a$ verschwindet, so dass $k + h > 0$ ist, so hat die Gleichung $f(u, 0) = 0$ mindestens eine $(k + h)$-fache Wurzel $u = a$.

Aus (2) erhält man nach dem Verfahren von BRIOT und BOUQUET in folgender Weise eine Entwicklung von z nach Potenzen von $(u - a)$:

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{A_1}(u - a)^{\frac{-(k+h)}{k+1}} + B_2(u - a)^{\frac{1-(k+h)}{k+1}} + \dots.$$

Die Integration giebt, wenn kein Exponent gleich -1 ist — in welchem Falle z unendlich gross würde für $u = a$ —

$$z - z_0 = C_1(u - a)^{\frac{1-h}{k+1}} + C_2(u - a)^{\frac{2-h}{k+1}} + \dots.$$

Es kann z nur endlich bleiben für $h < 1$. In diesem Falle ergiebt sich eine Entwicklung von u nach $z - z_0$:

$$u - a = D_1(z - z_0)^{\frac{k+1}{1-h}} + D_2(u - a)^{\frac{k+2}{1-h}} + \dots.$$

Da u eindeutige Function von z sein soll, so muss $\frac{k+1}{1-h}$ eine ganze Zahl sein. Nach der Entwicklung (2) entsprechen einem Punkte in der Nähe von $u = a$ $(k + 1)$ unendlich wenig verschiedene Stellen U und daher mindestens $k + 1$ verschiedene Stellen z; dieses ist nur möglich, wenn die Entwicklung von $u - a$ nach $(z - z_0)$ mindestens mit der $k + 1$ Potenz von $(z - z_0)$ beginnt, daher ist $h = 0$. Für $z = \infty$ war $h > 0$, folglich gilt die nothwendige Bedingung, dass $h \geq 0$ sein muss. Aus dieser Bedingung ergeben sich folgende Sätze:

1. Für endliche Werthe von u kann U nicht unendlich werden.

2. Wenn für $u = a$ der Werth von $U = 0$ wird, und es ist diese Stelle ein k-facher Verzweigungspunkt für U, so muss $u = a$ mindestens k-fache Wurzel von $f(u, 0) = 0$ sein.

Wenn die algebraische Gleichung (1) in Bezug auf U vom Grade m ist, so kann man sie in folgender Weise schreiben:

$$(1) \qquad f_0(u)U^m + f_1(u)U^{m-1} + \dots + f_{m-1}(u)U + f_m(u) = 0.$$

Es bedeuten $f_0(u), f_1(u), \dots$ ganze rationale Functionen von u. In Folge

der Bedingung 1. muss $f_0(u)$ eine Constante sein. Ebenso wie u ist auch $w = \frac{1}{u}$ eine eindeutige Function von z; führt man daher in (1) die Transformation ein:

$$u = \frac{1}{w}, \qquad U = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dz},$$

so darf in der transformirten Gleichung $\frac{dw}{dz}$ nur unendlich werden, wenn dieses für w der Fall ist, der Coefficient von $\left(\frac{dw}{dz}\right)^m$ muss in (1) constant sein; dieses ist nur möglich, wenn $f_1(u)$ höchstens vom 2ten Grade, $f_2(u)$ höchstens vom 4ten Grade in u ist, u. s. w., schliesslich $f_m(u)$ höchstens den Grad $2m$ hat, so dass die Gleichung (1) in Bezug auf u höchstens vom $2m^{\text{ten}}$ Grade ist.

Diese Resultate werden für die algebraische Gleichung von u und v:

$$(3) \qquad F(u\,,\,v) = 0$$

verallgemeinert, wenn hierin u und v eindeutige Functionen von z sind und die eindeutige Function u einer Differentialgleichung von der Form (1) genügt. Dann hat auch die eindeutige Function v diese Eigenschaft, denn durch Differentiation von (3) nach z erhält man eine algebraische Gleichung zwischen $u\,,\,v\,,\,\frac{du}{dz}$ und $\frac{dv}{dz}$. Eliminirt man aus dieser, aus (1) und (3) die Grössen u und $\frac{du}{dz}$, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen v und $\frac{dv}{dz}$.

Man bilde über der u Ebene eine m-blättrige Riemann'sche Fläche T, auf welcher die algebraische Function $U = \frac{du}{dz}$, welche durch (1) definirt wird, eindeutig ist. Durchläuft man dieselbe mit der algebraischen Function v, so kann es vorkommen, dass demselben Punkte auf T mehrere Werthenpaare $(u\,,\,v)$ entsprechen; dieser Fall soll zunächst ausgeschlossen werden, so dass auch v auf T eindeutig ist. Ferner kann zu l verschiedenen Stellen von T dasselbe Werthenpaar $(u\,,\,v)$ gehören. Diese Stellen haben denselben Werth u, liegen also in der u-Ebene übereinander in l verschiedenen Blättern von T. Bewegt man die l Punkte auf gleichem

Wege in der u-Ebene, das heisst so, dass stets u in allen l Blättern denselben Werth behält, und überschreitet auf diesem Wege keine Verzweigungspunkte von U und v, so hat einerseits v in den l übereinanderliegenden Punkten einen gleichen Werth und andererseits müssen die l Punkte stets in verschiedenen Blättern liegen. Bei dieser Wanderung kann man zu allen Werthenpaaren (u, v) gelangen und jedem entsprechen l Punkte von T. Es gilt dann der Satz:

Wenn einem Werthenpaare (u, v) l und nur l verschiedene Stellen von T entsprechen, so müssen auch jedem anderen Werthenpaare l und nur l Stellen von T entsprechen. Ausgenommen sind nur die Verzweigungspunkte.

Jedem u entsprechen im Allgemeinen m verschiedene Werthe U und daher nach obigem Satze $\frac{m}{l}$ verschiedene Werthe v. Die Gleichung (3) ist in Bezug auf v vom Grade $\frac{m}{l}$.

Für einen k-fachen Verzweigungspunkt von v, der im Endlichen der u-Ebene liegt, gilt die Entwicklung:

$$(4) \qquad v = A_1(u-a)^{\frac{p}{k+1}} + A_2(u-a)^{\frac{p+1}{k+1}} + \ldots, \qquad k > 0.$$

In der Nähe von $u = a$, z. B. für $u = a'$ giebt es $k + 1$ Werthe v:

$$v_1, v_2, \ldots, v_\nu, \ldots, v_{k+1},$$

welche in einander übergehen, wenn man den Punkt der Fläche T, für welchen die Entwicklung (4) gilt, k-mal umkreist. Bei diesem Umkreisen muss aber auch U in $u = a'$ $k + 1$ verschiedene Werthe erhalten, da jedem Werthenpaare (u, U) nur eine Stelle (u, v) entspricht. Es ist daher $u = a$ mindestens ein k-facher Verzweigungspunkt von T.

Es soll aber jeder Werth v_ν für $u = a'$ in l verschiedenen Blättern von T vorkommen, so dass ihm l verschiedene U entsprechen, welche mit:

$$U_\nu', U_\nu'', \ldots, U_\nu^{(\mu)}, \ldots, U_\nu^{(l)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k+1)$$

bezeichnet werden sollen. Von diesen $l(k + 1)$ Werthen U müssen je $(k + 1)$ zu einem Verzweigungspunkt von T gehören, und es kann die Bezeichnung so gewählt werden, dass dieses immer diejenigen Werthe sind,

deren oberer Index (μ) gleich ist. Ferner können einige der k-fachen Verzweigungspunkte von T zusammenfallen, dieses möge z. B. für die n_1 Gruppen $U_\gamma^{(\mu)}$ der Fall sein, für welche $\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_1}$ wird. Alsdann bilden diese einen q_1-fachen Verzweigungspunkt:

$$q_1 = n_1(k + 1) - 1.$$

Von den anderen Gruppen $U_\nu^{(\mu)}$ mögen noch $n_2, n_3, \ldots$ einen gemeinsamen Verzweigungspunkt bilden, welcher dann beziehungsweise $q_2 + 1$, $q_3 + 1, \ldots$ verschiedene Blätter von T verbindet. Die Summe aller Gruppen ist l, so dass: $\Sigma n = l$. Der k-fache Verzweigungspunkt von v verlangt dann $q_1 + q_2 + q_3 \ldots$ Verzweigungspunkte in T:

$$\Sigma q = \Sigma n . k + \Sigma(n - 1) \geqq lk.$$

Bezeichnet man mit Q die Anzahl sämmtlicher Verzweigungspunkte von v, für welche u endlich ist — hierbei wird jeder k-fache Verzweigungspunkt wie k einfache Verzweigungspunkte gezählt —, so verlangen diese mindestens $l . Q$ Verzweigungspunkte auf T.

Wie oben gezeigt wurde, muss jeder k-fache Verzweigungspunkt von U mindestens k-fache Wurzel von $f(u, 0) = 0$ sein, so dass jene $l . Q$ kritischen Punkte der Gleichung $f(u, 0) = 0$ ebensoviele Wurzeln geben; wenn ausserdem noch s Wurzeln vorhanden sind, so gilt die Ungleichung:

$$(5) \qquad 2m \geqq lQ + s,$$

denn (1) ist höchstens vom Grade $2m$ in u.

Um den wichtigen Einfluss dieser Bedingung auf (3) zu erkennen, betrachte man $F(u, v) = 0$ als algebraische Curve der rechtwinkligen Coordinaten u und v. Einem einfachen Verzweigungspunkt entspricht bekanntlich entweder eine einfache Tangente vom unendlich fernen Punkte der v-Axe oder ein einfacher Rückkehrpunkt. Im Allgemeinen giebt die Anzahl der Tangenten, welche von irgend einem Punkte an die Curve gezogen werden können, die Classe $= k$ derselben an. Unter der Annahme, dass in (3) dieses für den unendlich fernen Punkt der v-Axe der Fall ist und dass für sämmtliche Verzweigungspunkte von (3) sowohl v als auch u endlich bleiben, ist $Q = k + r$, wenn r die Anzahl der Rückkehrpunkte bezeichnet.

Ferner soll angenommen werden, dass in (3) der Grad von v; also $\frac{m}{l}$, zugleich die Ordnung der Curve ist. Bezeichnet p das Geschlecht von (3), so gilt folgende (PLÜCKER'sche) Formel:

$$2p - 2 = k + r - 2\frac{m}{l}.$$

Verbindet man dieselbe mit (5), so ergiebt sich:

$$p \leqq 1 - \frac{s}{2l}. \tag{6}$$

Es sind s, l und p ganze positive Zahlen oder Null, daher muss $p < 2$ und s entweder Null oder $2l$ sein, für $p = 1$ muss $s = 0$ sein. Hiermit ist die nothwendige Bedingung gefunden:

Das Geschlecht von (3) muss kleiner als zwei sein.

Im Laufe der Untersuchung wurden der Gleichung (3) einige Beschränkungen auferlegt, welche aber leicht durch die lineare Substitution

$$u = \frac{b_1 u' + b_2 v' + b_3}{a_1 u' + a_2 v' + a_3}, \qquad v = \frac{c_1 u' + c_2 v' + c_3}{a_1 u' + a_2 v' + a_3}, \tag{7}$$

in welcher a, b und c beliebige Constanten bedeuten, beseitigt werden können. Da u und v eindeutige Functionen von einem Parameter sind, so ist dieses auch für u' und v' der Fall. Ferner lässt die Substitution das Geschlecht von (3) ungeändert. Wenn daher für die transformirte Gleichung jene Bedingung für das Geschlecht gilt, so ist dieses für (3) selbst der Fall.

Es wurde verlangt, dass die Anzahl der Tangenten vom unendlich fernen Punkt der v-Axe gleich der Classe k von (3) sei. Man erreicht dieses für eine Curve in u' und v' auf folgende Weise. Wenn $u = u_1$ und $v = v_1$ einer der unzählig vielen Punkte ist, von dem aus die Anzahl der Tangenten $= k$ ist und der nicht auf der Curve (3) selbst liegt, so bestimme man:

$$\frac{b_2}{a_2} = u_1; \qquad \frac{c_2}{a_2} = v_1.$$

Dem Punkte $u = u_1$, $v = v_1$ entspricht in der transformirten Curve der unendlich ferne Punkt der v'-Axe, und es lassen sich von $u' = 0$, $v' = \infty$

k Tangenten ziehen; durch die lineare Substitution wird die Classe der Curve nicht geändert.

Ferner wurde vorausgesetzt, dass in der Gleichung (3) die Ordnung n mit dem Grad in v übereinstimmt, und dass für $u = \infty$ und für $v = \infty$ die algebraische Function v von u keinen Verzweigungspunkt besitzt. Um dieses durch die Substitution zu erreichen, bestimme man b_1, a_1 und c_1 derart, dass die Gerade, welche durch die Gleichungen:

$$u = \frac{b_1 t + b_2}{a_1 t + a_2}; \qquad v = \frac{c_1 t + c_2}{a_1 t + a_2}$$

bestimmt wird, wenn t einen beliebigen Parameter bedeutet, und welche durch den Punkt $u = u_1$, $v = v_1$ geht, in n verschiedenen Punkten, für welche t n verschiedene endliche Werthe $t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \ldots, t_n$ annimmt, die Curve (3) schneidet. Die transformirte Curve erhält dann für $u' = \infty$ n verschiedene, endliche Werthe $\frac{u'}{v'} = t_\nu$, d. h. sie hat im Unendlichen keinen singulären Punkt und ihr Grad in v ist n.

Da im Allgemeinen die Wahl des Punktes (u_1, v_1) und die Richtung obiger Geraden beliebig sind, so tritt keine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten auf; a_ν, b_ν und c_ν bleiben im Allgemeinen beliebig.

Die Gleichung (1) ist in Bezug auf U vom m^{ten} Grade; durch die Substitution $u = \frac{1}{u' + a}$, $U = -\frac{1}{(u' + a)^2}\frac{du'}{dz}$ wird die neue Gleichung für u' und $\frac{du'}{dz}$ im Allgemeinen vom $2m^{\text{ten}}$ Grade in u'; es kann dann auch durch die allgemeinere Substitution (7) erreicht werden, dass in der Gleichung zwischen u' und $\frac{du'}{dz}$ der Grad von u' das Doppelte vom Grade in $\frac{du'}{dz}$ ist. In diesem Falle muss es für $u' = \infty$ mindestens eine Stelle geben, für welche $\frac{1}{(u')^\mu} \cdot \frac{du'}{dz}$ endlich und von Null verschieden ist, wenn $\mu > 1$ ist.

Ausser den eben behandelten Annahmen wurde noch verlangt, dass die Gleichungen (1) und (3) in solcher Verbindung stehen, dass niemals einem Werthenpaare (u, U) verschiedene Werthenpaare (u, v) entsprechen. Es möge diese Annahme für die transformirte Curve in u' und v' nicht erfüllt sein, sondern zu dem Punkte $u' = u_1'$ und $\frac{du'}{dz} = U_1'$ zwei ver-

schiedene Stellen (u', v') gehören. Man gehe dann von (u'_1, U'_1) in der u'-Ebene aus, beschreibe irgend eine Curve, ohne einen Verzweigungspunkt von $\frac{du'}{dz}$ und v' zu überschreiten, und bestimme in jedem Punkte derselben den Werth von v. Es ist dann ersichtlich, dass jedem Werthenpaare $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ zwei Werthe von (u', v') entsprechen, daher müssen auch von den n verschiedenen Stellen (u', v') für $u' = \infty$ mindestens je zwei zu demselben Werthenpaare $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ gehören.

Für $u' = \infty$ ist jede der n verschiedenen Stellen (u', v') durch einen der Werthe t_ν charakterisirt, welchen hier $\frac{u'}{v'} = \frac{du'}{dv'}$ annimmt. Für ein Werthenpaar $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ im Unendlichen der u'-Ebene möge

$$\frac{1}{u'^{\mu}} \cdot \frac{du'}{dz} = \sigma, \qquad (\mu > 0)$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth annehmen. Zu dieser Stelle gehören zwei verschiedene Werthe t_ν und zwei verschiedene Werthe $\frac{1}{u'^{\mu}} \cdot \frac{dv'}{dz} = \frac{\sigma}{t_\nu}$. Betrachtet man aber die Functionen $u'' = u' + \alpha v'$ und v' und bezeichnet mit t'_ν und σ' die Grössen, welche für die neue Gleichung in u'' und v' analoge Bedeutung haben, wie t_ν und σ für die Gleichung in u' und v', so erhält man:

$$\sigma' = \frac{1}{(u' + \alpha v')^{\mu}} \left(\frac{du'}{dz} + \alpha \frac{dv'}{dz}\right); \qquad t_\nu = \frac{u' + \alpha v'}{v'} \qquad (\text{für } u' = \infty);$$

$$\sigma' = \sigma \frac{1}{\left(1 + \alpha \frac{1}{t_\nu}\right)^{\mu - 1}}; \qquad t'_\nu = t_\nu + \alpha.$$

Wenn $\mu \gtrless 1$ ist, so kann man α derart wählen, dass für verschiedene Werthe t_ν auch σ' einen verschiedenen Werth annimmt, und dass σ' mit keinem Werth übereinstimmt, den $\frac{1}{u''^{\lambda}} \cdot \frac{du''}{dz}$ für beliebige Werthe λ im Unendlichen von u'' annimmt. Alsdann kann diesem Werthe σ' nur ein t'_ν entsprechen. Wenigstens an einer Stelle im Unendlichen muss aber

$\mu > 1$ sein. Es giebt also ein Werthenpaar $\left(u'', \frac{du''}{dz}\right)$, zu dem nur ein Werthenpaar (u'', v') gehört, folglich kann überhaupt keine Stelle $\left(u'', \frac{du''}{dz}\right)$ mehreren Stellen (u'', v') entsprechen. Hierdurch ist auch die letzte Beschränkung für (3) beseitigt, so dass folgender Satz gilt:

Wenn in einer algebraischen irreductiblen Gleichung zwischen u und v die beiden Veränderlichen als eindeutige Functionen eines Parameters z ausgedrückt werden können und u eine algebraische Function von $\frac{du}{dz}$ ist, so muss das Geschlecht jener Gleichung kleiner als zwei sein.

Die Substitution (7) wird auf einen speciellen Fall von (3) nämlich auf (1) selbst angewendet.

$$(8) \qquad u' = \frac{B_1 u + B_2\left(\frac{du}{dz}\right) + B_3}{A_1 u + A_2\left(\frac{du}{dz}\right) + A_3}; \qquad v' = \frac{C_1 u + C_2\left(\frac{du}{dz}\right) + C_3}{A_1 u + A_2\left(\frac{du}{dz}\right) + A_3}.$$

Die transformirte Gleichung in u' und v' soll dann alle Annahmen erfüllen, mit Hülfe deren die Ungleichung (6) abgeleitet wurde, und für $\frac{du}{dz} = 0$ soll u' nicht unendlich werden. Jedem Werthenpaare (u', v') entspricht ein Werthenpaar $\left(u, \frac{du}{dz}\right)$, und diesem nur ein Werthenpaar $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$, folglich gehört zu jedem (u', v') nur eine Stelle $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ und die Zahl l in (6) ist hier gleich 1. Es kann daher s nur 2 oder 0 sein. Es möge $\frac{du'}{dz}$ für $u' = a'_1, a'_2, \ldots, a'_\nu$ verschwinden und die Entwicklung nach $u' - a'_\nu$ lauten:

$$(9) \qquad \frac{du'}{dz} = A'_\nu(u' - a'_\nu)^{\frac{p_\nu + l_\nu}{p_\nu + 1}} + \ldots \qquad (p_\nu > 0\,;\ l_\nu \geq 0).$$

Dann ist $u' = a'_\nu$ eine $(p_\nu + l_\nu)$-fache Wurzel der Gleichung zwischen u' und $\frac{du'}{dz}$ für $\frac{du'}{dz} = 0$, folglich ist $s = \sum l_\nu$. Höchstens für zwei Entwicklungen (9) kann $l_\nu > 0$ sein. Um zu erkennen, dass diese Beziehung auch für (1) selbst gilt, betrachte man die Stellen von (1), welche der Entwicklung (9) entsprechen. Die Substitution ist so eingerichtet, dass jedem

Werthenpaar $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ nur ein Werthenpaar (u', v') entspricht; hierfür ergiebt sich nur eine Stelle $\left(u, \frac{du}{dz}\right)$, folglich gehört zu (9) nur eine Stelle von (1); für dieselbe soll die Entwicklung gelten:

$$(10) \qquad \frac{du}{dz} = A_\nu (u - a_\nu)^{\frac{h_\nu}{k_\nu + 1}} + A'_\nu (u - a_\nu)^{\frac{h_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \dots \qquad (k_\nu > 0).$$

Wenn $u = a_\nu$ eine Wurzel von $f(u, 0) = 0$ sein soll, so muss $h_\nu > 0$ sein. Setzt man diese Entwicklung in (8) ein, so ergiebt sich:

$$(11) \qquad u' - a'_\nu = B(u - a_\nu)^{\frac{n_\nu}{k_\nu + 1}} + B_1 (u - a_\nu)^{\frac{n_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \dots;$$

$$\frac{du'}{dz} = \frac{n_\nu}{k_{\nu+1}} B(u - a_\nu)^{\frac{n_\nu}{k_\nu + 1} - 1 + \frac{h_\nu}{k_\nu + 1}} + \dots.$$

Wenn $u' = b$ in der Nähe von $u' = a'_\nu$ liegt, so giebt (9) nur $p_\nu + 1$ verschiedene Werthe $\frac{du'}{dz}$, und diese höchstens $p_\nu + 1$ verschiedene Werthe u, folglich kann n_ν nicht grösser als $p_\nu + 1$ sein. Eliminirt man aus den Entwicklungen (11) den Werth $(u - a_\nu)$, so erhält man:

$$\frac{du'}{dz} = A'_\nu (u' - a'_\nu)^{\frac{n_\nu + h_\nu - k_\nu - 1}{n_\nu}} + \dots.$$

Der Vergleich mit (9) ergiebt:

$$n_\nu = c.(p_\nu + 1), \qquad h_\nu = (k_\nu + l_\nu).c \qquad (c \text{ ist eine ganze Zahl } > 0),$$

da $n_\nu \leqq p_\nu + 1$, so ist $c = 1$. Hiernach gilt der Satz:

Wenn $\frac{du}{dz}$ für $u = a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ verschwindet, und die Entwicklungen nach $(u - a_\nu)$ die Form (10) haben, so ist $h_\nu = k_\nu + l_\nu$; wenn die Gleichung (1) vom Geschlecht Eins ist, so muss l_ν überall gleich Null sein; wenn dagegen das Geschlecht von (1) Null ist, so muss $\Sigma l_\nu < 3$ sein.

II.

In diesem Abschnitt soll nachgewiesen werden, dass jene nothwendige Bedingung, welche verlangt, dass das Geschlecht von

$$F(u, v) = 0$$

niedriger als zwei ist, wenn u und v als eindeutige Functionen eines Parameters z:

$$u = \varphi(z), \qquad v = \psi(z)$$

dargestellt werden können, und wenn $\frac{du}{dz}$ eine algebraische Function von u ist, zugleich hinreichende Bedingung ist.

Um dieses nachzuweisen, gehe man von der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad s^2 - R(x) = 0,$$

$$s = \frac{dx}{dz}, \qquad R(x) = K_4 x^4 + K_3 x^3 + \ldots + K_0$$

aus. Wenn die vier Wurzeln von $R(x)$ verschieden sind, so ist die Gleichung (1) vom Geschlecht Eins, im andern Falle vom Geschlecht Null. Eine Untersuchung derselben lehrt, dass x eine eindeutige Function von z ist.

Jede rationale Function von x und s ist auch eindeutige Function von z. Die allgemeinste Form einer solchen ist:

$$(2) \qquad y = \frac{g(x) + h(x) \cdot s}{p(x)} = \frac{q(x)}{p(x)};$$

$g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ bedeuten ganze rationale Functionen von x, welche keinen gemeinsamen Theiler haben. Es ist sofort ersichtlich, dass $\frac{dy}{dz}$ eine algebraische Function von y ist. Ebenso erkennt man, dass zwischen zwei verschiedenen Functionen y_1 und y_2 von der Form (2) eine algebraische Formel besteht.

Die Form (2) repräsentirt somit eine grosse Mannigfaltigkeit von eindeutigen Functionen in z, welche alle in die Classe derjenigen eindeutigen Functionen gehören, welche hier behandelt werden. Wir untersuchen den Fall, dass x eine m-deutige Function von y ist. Aus (2) ergiebt sich:

$$(3) \qquad p^2(x)y^2 - 2g(x)p(x)y + g^2(x) - h^2(x)R(x) = 0.$$

x ist m-deutige Function von y, wenn $g^2(x) - h^2(x)R(x)$ durch $p(x)$ theilbar ist und $p(x), g(x)$ und $h(x)R(x)$ vom m^{ten} Grade sind. Man bezeichne die Coefficienten von diesen ganzen rationalen Functionen in folgender Weise:

$$g(x) = A_0 x^m + \ldots + A_\mu x^{m-\mu} + \ldots + A_m,$$
$$h(x) = B_0 x^{m-2} + \ldots + B_\mu x^{m-2-\mu} + \ldots + B_{m-2},$$
$$p(x) = x^m + C_1 x^{m-1} + \ldots + C_\mu x^{m-\mu} + \ldots + C_m.$$

Da in (3) das von y unabhängige Glied $g^2(x) - h^2(x)R(x)$ durch $p(x)$ theilbar sein soll, so müssen folgende Bedingungsgleichungen für die Coefficienten A_μ, B_μ und C_μ bestehen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} g(\alpha_\nu) + h(\alpha_\nu)\sqrt{R(\alpha_\nu)} &= 0, \\ p(\alpha_\nu) &= 0. \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, m)}$$

Wenn die Coefficienten A_μ und B_μ gegeben sind, so sind die C_μ bestimmt und zwar sind die letzteren algebraische Functionen der anderen Grössen. Es möge für die Coefficienten A_μ und B_μ eine bestimmte Wahl getroffen sein, z. B.

$$A_\mu = A'_\mu \quad \text{und} \quad B_\mu = B'_\mu,$$

dann mögen die Werthe $C_\mu = C'_\mu$ den Bedingungen (4) genügen und die Wurzeln α_ν die Werthe α'_ν annehmen. Die Coefficienten A'_μ und B'_μ können immer so gewählt werden, dass die Wurzeln α_ν alle verschieden sind. Für diese Bestimmung der Coefficienten bezeichne man die Gleichung (2) in folgender Weise:

$$(5) \qquad P(x)y - Q(x) = 0,$$

so dass $P(x) = x^m + C'_1 x^{m-1} + C'_2 x^{m-2} + \ldots + C'_m$,

$$Q(x) = A'_0 x^m + \ldots + A'_m + (B'_0 x^{m-2} + \ldots + B'_{m-2})\sqrt{R(x)}.$$

Wenn sich die A_ν und B_ν unendlich wenig, um ∂A_ν und ∂B_ν ändern, so soll die Änderung von C_ν mit ∂C_ν und von α_ν mit $\partial\alpha_\nu$ bezeichnet werden. Es lässt sich dann allgemein ∂C_ν durch die Variationen ∂A_ν, ∂B_ν ausdrücken. Man bilde zu diesem Zweck das Differential der Gleichungen (4):

$$
(6)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial A'_0}\partial A_0 + \dots + \frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial B'_0}\partial B_0 + \dots + \frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\partial\alpha_\nu = 0,\\
&\frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial C'_1}\partial C_1 + \dots + \frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial C'_m}\partial C_m + \frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\partial\alpha_\nu = 0.
\end{aligned}\qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\dots,m)}
$$

Für den besonderen Fall $m = 2$ werden diese Gleichungen die Form annehmen:

$$
\begin{aligned}
&\alpha'^2_\nu\partial A_0 + \alpha'_\nu\partial A_1 + \partial A_2 - \sqrt{R(\alpha'_\nu)}\,\partial B + \frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\partial\alpha_\nu = 0,\\
&\alpha'_\nu\partial C_1 + \partial C_2 + \frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\partial\alpha_\nu = 0.
\end{aligned}\qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\dots,m)}
$$

Hieraus berechne man ∂C_ν und $\partial\alpha_\nu$. Es sind lineare Functionen von ∂A_ν und ∂B_ν:

$$
(7)\qquad \partial C_\nu = \frac{\partial C'_\nu}{\partial A'_0}\partial A_0 + \dots + \frac{\partial C'_\nu}{\partial A'_m}\partial A_m + \frac{\partial C'_\nu}{\partial B'_0}\partial B_0 + \dots + \frac{\partial C'_\nu}{\partial B'_{m-2}}\partial B_{m-2};
$$

die Coefficienten $\frac{\partial C_\nu}{\partial A'_\mu}$ und $\frac{\partial C_\nu}{\partial B'_\mu}$ werden nur dann unendlich, wenn die Determinante D_m der Coefficienten von ∂C_ν und $\partial\alpha_\nu$ in (6) verschwindet. Für $m = 2$ erhält man:

$$
D_2 = \begin{vmatrix}
0 & 0 & \frac{\partial Q(\alpha'_1)}{\partial \alpha'_1} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial Q(\alpha'_2)}{\partial \alpha'_2}\\
\alpha'_1 & 1 & \frac{\partial P(\alpha'_1)}{\partial \alpha'_1} & 0\\
\alpha'_2 & 1 & 0 & \frac{\partial P(\alpha'_2)}{\partial \alpha'_2}
\end{vmatrix}
$$

oder

$$
D_2 = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & 1\\ \alpha'_2 & 1\end{vmatrix}\prod_{\nu=1}^{\nu=2}\frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}.
$$

Allgemein heisst diese Determinante:

$$D_m = \begin{vmatrix} \alpha_1'^{m-1}, & \alpha_1'^{m-2}, & \dots, & \alpha_1', & 1 \\ \alpha_2'^{m-1}, & \alpha_2'^{m-2}, & \dots, & \alpha_2', & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_m'^{m-1}, & \alpha_m'^{m-2}, & \dots, & \alpha_m', & 1 \end{vmatrix} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\partial Q(\alpha_\nu')}{\partial \alpha_\nu'}.$$

Sie verschwindet nur dann, wenn $g(x) - h(x)\sqrt{R(x)}$ mehrfache Wurzeln hat und nur in diesem Falle können die Grössen $\frac{\partial C_\nu'}{\partial A_\mu'}, \frac{\partial C_\nu'}{\partial B_\mu'}$ unendlich werden.

Für die m-deutige algebraische Function x der Veränderlichen y, welche durch die Gleichung

$$(2) \qquad p(x)y - q(x) = 0$$

definirt wird, sind die Verzweigungspunkte von besonderer Wichtigkeit, und zwar hat dieselbe — wie gezeigt werden soll — $2m$ einfache Verzweigungspunkte. Wenn aber $R(x)$ einen Grad hat, der kleiner als 3 ist, so giebt es nur $2m - 2$ einfache Verzweigungspunkte.

Man kann sich darauf beschränken, solche algebraische Functionen x zu betrachten, für deren Verzweigungspunkte x und y endlich bleiben, denn man kann dieses stets durch die Substitution $x' = \frac{1}{x+a}$, $y' = \frac{1}{y+b}$ erreichen, wenn a und b beliebige Constanten bedeuten. Hat für die endlichen Werthe $x = \xi$ und $y = \eta$ die Function x einen Verzweigungspunkt, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$p(\xi)\eta - q(\xi) = 0,$$

$$\frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi}\eta - \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi} = 0.$$

In der Entwicklung von y nach $\xi - x$ muss der Coefficient von $(\xi - x)$ verschwinden:

$$(8) \qquad y = \eta + A_2(\xi - x)^2 + A_3(\xi - x)^3 + \dots,$$

d. h. $\frac{dy}{dx}$ muss für diese Stelle Null werden und auch umgekehrt, wenn $\frac{dy}{dx}$ verschwindet, so hat x einen Verzweigungspunkt.

Man bezeichne $\frac{df(x)}{dx}$ mit $f'(x)$, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\{2sg'(x) + 2h'(x)R(x) + h(x)R'(x)\}p(x) - \{g(x) + h(x)s\}2sp'(x)}{2sp^2(x)}.$$

In rationaler Form lautet diese Gleichung:

$$(9) \qquad 4p^4(x)R(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 8p^2(x)R(x)\{p(x)g'(x) - p'(x)g(x)\}\frac{dy}{dx} + t(x) = 0.$$

Hierin ist:

$$(10) \qquad t(x) = p^2(x)\{4g'(x)^2R(x) - [2h'(x)R(x) + h(x)R'(x)]^2\}$$
$$- 4p'(x)R(x)\{p(x)[2g(x)g'(x) - 2h(x)h'(x)R(x) - h^2(x)R'(x)]$$
$$- [g^2(x) - h^2(x)R(x)]p'(x)\}.$$

Es kann $t(x)$ auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$(10') \qquad t(x) = 4R(x)\{g(x)p'(x) - p(x)g'(x)\}^2$$
$$- \{2h'(x)p(x)R(x) + h(x)p(x)R'(x) - 2h(x)p'(x)R(x)\}^2.$$

Da $g^2(x) - h^2(x)R(x)$ durch $p(x)$ theilbar sein soll, so ist:

$$r(x) = \frac{g^2(x) - h^2(x)R(x)}{p(x)}$$

eine ganze rationale Function vom m^{ten} Grade und

$$r'(x) = \frac{p(x)[2g(x)g'(x) - 2h(x)h'(x)R(x) - h^2(x)R'(x)] - [g^2(x) - h^2(x)R(x)]p'(x)}{p^2(x)}$$

eine ganze rationale Function vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade. Ein Vergleich von $r'(x)$ mit (10) ergiebt, dass $t(x)$ durch $p^2(x)$ theilbar sein muss. Andererseits zeigt (10'), dass $t(x)$ im Allgemeinen vom Grade $4m$ sein muss daher ist $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ eine ganze rationale Function von x vom Grade $2m$. — Wenn der Grad von $R(x)$ kleiner als 3 ist, so kann in ähnlicher Weise

bewiesen werden, dass dann $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ vom Grade $2m - 2$ ist. — Die Gleichung (9) ist im Allgemeinen, wie der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ zeigt, höchstens durch $p^2(x)$ theilbar, folglich geben die $2m$ Wurzeln von $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ die Stellen an, für welche $\frac{dy}{dx}$ verschwindet.

Wenn $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ eine mehrfache Wurzel hat, so zeigt die Differentiation von (9) nach x, dass für diese Wurzel auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwinden muss, wenn nicht $p(x)g'(x) - p'(x)g(x)$ verschwindet, und dann ist in der Entwicklung (8) auch $A_2 = 0$, so dass an dieser Stelle x einen mehrfachen Verzweigungspunkt hat. Die Wurzeln von $\frac{t(x)}{p^2(x)} = 0$ sollen mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda, \ldots, \xi_{2m}$ bezeichnet werden. Sie sind algebraische Functionen der Coefficienten A_μ und B_μ. Es ist zu untersuchen, ob bei jeder beliebigen Wahl der Coefficienten in Folge der Bedingung (4) zwei Wurzeln gleich sind. Wenn A_0 unendlich wenig, um ∂A_0, geändert wird, so ändern sich auch die ξ_λ unendlich wenig, daher kann ∂A_0 so klein angenommen werden, dass diejenigen Wurzeln ξ_λ, welche vor der Änderung verschieden waren, auch nach derselben dasselbe Verhalten zeigen. Wenn also stets 2 Wurzeln ξ_λ gleich bleiben sollen, so kann dieses nur geschehen, wenn 2 Werthe, z. B. ξ_1 und ξ_2, welche vor der Änderung coincidirten, auch nach derselben gleich geblieben sind. Die Differenz $\xi_1 - \xi_2$, welche eine algebraische Function von A_0 ist, hat dann auf einer unendlich kleinen Strecke von A_0 bis $A_0 + \partial A_0$ den constanten Werth Null und muss nach einem bekannten Satze der Functionentheorie (siehe Briot und Bouquet, *Théorie des fonc. ellipt.* No. 114) für jeden Werth der Veränderlichen verschwinden. Man kann A_0 in solcher Weise stetig ändern, dass ξ_1 in irgend eine andere Wurzel ξ_λ übergeht, also muss auch ξ_λ mit einer anderen Wurzel $\xi_{\lambda'}$ coincidiren. Wenn für jede beliebige Wahl der Coefficienten A_μ und B_μ irgend zwei Wurzeln coincidiren, so muss stets jede Wurzel von $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ mindestens eine zweifache Wurzel sein.

Für eine mehrfache Wurzel hat aber x mehrfache Verzweigungspunkte, wenn $p(x)g'(x) - p'(x)g(x)$ von Null verschieden ist. Man

kann aber die Coefficienten A_μ und B_μ so wählen, dass x einen einfachen Verzweigungspunkt besitzt:

$$y = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{C_m + C_{m-1}x + \ldots + C_1 x^{m-1} + x^m},$$

$$a_0 = A_m \quad + B_{m-2}\sqrt{R(0)};$$

$$a_1 = A_{m-1} + B_{m-2}\left(\frac{d\sqrt{R(x)}}{dx}\right)_{x=0} + B_{m-3}\sqrt{R(0)};$$

$$a_2 = A_{m-2} + B_{m-2}\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\sqrt{R(x)}}{dx^2}\right)_{x=0} + B_{m-3}\left(\frac{d\sqrt{R(x)}}{dx}\right)_{x=0} + B_{m-4}\sqrt{R(0)}.$$

Hierin können die Coefficienten A_μ und B_μ stets so gewählt werden, dass:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 \neq 0,$$

d. h. man hat die Coefficienten von $q(x)$ so bestimmt, dass nur 2 Wurzeln gleich Null sind. Von den anderen $2m - 2$ Wurzeln wähle man m als Wurzeln von $p(x)$, dann sind die Bedingungen (4) erfüllt und $C_m \neq 0$. Da hierbei alle Constanten bis auf 2 beliebig geblieben sind, so kann man es stets so einrichten, dass $C_m A_{m-1} - C_{m-1} A_m \neq 0$, so dass

$$p(x)g'(x) - p'(x)g(x)$$

für $x = 0$ nicht verschwindet. Die Entwicklung für $y = 0$ und $x = 0$ ist dann:

$$y = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots, \qquad c_2 = \frac{a_2}{C_0},$$

d. h. $y = 0$ ist ein einfacher Verzweigungspunkt von x.

Man kann daher allgemein die $2m$ Constanten A_μ und B_μ so bestimmen, dass alle $2m$ Werthe ξ_λ und daher auch alle $2m$ Werthe η_λ, welche hierzu gehören, verschieden sind. Durch unendlich kleine Änderung der Coefficienten bleiben die ξ_λ verschieden; diese Änderung lässt sich so einrichten, dass auch die Wurzeln von $q(x) = 0$ verschieden sind.

Es ist somit die Existenz einer Gleichung (2) nachgewiesen, bei welcher alle Wurzeln von $q(x)$ verschieden sind und die algebraische Func-

tion x von y, welche durch diese Gleichung definirt wird, $2m$ einfache Verzweigungspunkte besitzt. Es möge die Gleichung (5)

$$P(x)y - Q(x) = 0 \tag{5}$$

diese Eigenschaften besitzen. Die $2m$ Verzweigungspunkte sollen mit $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{2m}$ bezeichnet werden; die Werthe x, welche zu diesen gehören, seien $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{2m}$, die $2m$ Wurzeln von $Q(x)$ heissen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{2m}$.

In der Gleichung (2) hat man $2m$ beliebige Coefficienten A_μ und B_μ zur Verfügung. Um dieselben zu bestimmen, können $2m$ Bestimmungsstücke gegeben werden. Zum Beispiel könnte verlangt werden, dass die Gleichung (2) für die $2m$ Werthenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\nu, y_\nu), \ldots, (x_{2m}, y_{2m})$ erfüllt werde, so dass die Bedingungsgleichungen gelten:

$$p(x_\nu) y_\nu - q(x_\nu) = 0. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, 2m)$$

Wenn ausserdem verlangt wird, dass für $y = y_{2m}$ die algebraische Function einen Verzweigungspunkt habe, so tritt noch die Bedingung hinzu:

$$p'(x_{2m}) y_{2m} - q'(x_{2m}) = 0.$$

Alsdann wären zu viel Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Coefficienten gegeben, und man könnte nur verlangen, dass die Gleichung (2) für die $(2m - 1)$ Werthenpaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_{2m-1}, y_{2m-1})$ erfüllt werde, aber ausserdem, dass die algebraische Function x für $y = y_{2m}$ einen einfachen Verzweigungspunkt habe. Hiermit ist die Aufgabe begründet:

Es soll eine Gleichung von der Form (2) *gebildet werden, so dass sie durch die n Werthenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\nu, y_\nu), \ldots, (x_n, y_n)$ erfüllt wird, und dass die algebraische m-deutige Function x von y, welche durch* (2) *definirt wird, für $y = \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \ldots, \eta_\lambda, \ldots, \eta_{2m}$ einfache Verzweigungspunkte hat.*

Die Bedingungsgleichungen sind:

$$p(x_\nu) y_\nu - q(x_\nu) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} p(\xi_\lambda)\eta_\lambda - q(\xi_\lambda) &= 0 \quad (12) \\ p'(\xi_\lambda)\eta_\lambda - q'(\xi_\lambda) &= 0 \quad (13) \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda = n+1, \ldots, 2m)$$

Die Werthe ξ_λ, welche zu den Verzweigungspunkten gehören, sind beliebig.

Um die Lösbarkeit der Aufgabe zu beweisen, müssen gewisse Determinanten untersucht werden. Hierbei legen wir die Function (5) zu Grunde, welche $2m$ verschiedene Verzweigungspunkte η_λ besitzt. Es mögen die Werthenpaare $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \ldots, (x'_\nu, y'_\nu), \ldots, (x'_n, y'_n)$ der Gleichung (5) genügen. Unter x'_ν wird stets eine einzige Stelle $(x, \sqrt{R(x)})$ verstanden, bei welcher $\sqrt{R(x)}$ ein gegebenes Vorzeichen hat. Durch unendlich kleine Änderung der (x_ν, y_ν) und η_λ um $\partial x_\nu, \partial y_\nu$, beziehungsweise $\partial \eta_\lambda$ erhalten die Coefficienten A_μ und B_μ gewisse Änderungen ∂A_μ und ∂B_μ. Das Differential der Gleichungen (11) und (12) wird dann:

$$(14)\qquad y'_\nu \frac{\partial P(x'_\nu)}{\partial C'_1} \partial C_1 + \ldots + y'_\nu \frac{\partial P(x'_\nu)}{\partial C'_m} \partial C_m - \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial A'_0} \partial A_0 - \ldots$$
$$- \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial A'_m} \partial A_m - \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial B'_0} \partial B_0 - \ldots - \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial B'_{m-2}} \partial B_{m-2}$$
$$+ P(x'_\nu) \partial y_\nu + \frac{\partial [P(x'_\nu) y'_\nu - Q(x'_\nu)]}{\partial x'_\nu} \partial x_\nu = 0.$$

$$(15)\qquad \eta'_\lambda \frac{\partial P(\xi'_\lambda)}{\partial C'_1} \partial C_1 + \ldots + \eta'_\lambda \frac{\partial P(\xi'_\lambda)}{\partial C'_m} \partial C_m - \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial A'_0} \partial A_0 - \ldots$$
$$- \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial A'_m} \partial A_m - \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial B'_0} \partial B_0 - \ldots - \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial B'_{m-2}} \partial B_{m-2}$$
$$+ P(\xi'_\lambda) \partial \eta_\lambda + \frac{\partial [P(\xi'_\lambda) \eta'_\lambda - Q(\xi'_\lambda)]}{\partial \xi'_\lambda} \partial \xi_\lambda = 0.$$

Wenn hier die Determinante $R_{m,n}$ welche aus den Coefficienten von ∂A_μ, ∂B_μ, $\partial \xi_\lambda$ gebildet wird, nicht verschwindet, so lassen sich A_μ und B_μ nach ganzen positiven Potenzen von $(x'_\nu - x_\nu)$, $(y'_\nu - y_\nu)$ und $(\eta'_\nu - \eta_\nu)$ entwickeln. Der Coefficient von $\partial \xi_\nu$ in der Gleichung (15) verschwindet, da $\xi'_\lambda, \eta'_\lambda$ ein Verzweigungspunkt von x ist. Nur unter den Gleichungen (13) ist eine solche vorhanden, bei welcher der Coefficient von $\partial \xi_\lambda$ nicht verschwindet; derselbe hat den Werth:

$$\frac{\partial^2 [P(\xi_\lambda) \eta'_\lambda - Q(\xi'_\lambda)]}{\partial^2 \xi'_\lambda}.$$

Für den besonderen Fall $m = 2$ werden die Gleichungen (14) und (15) folgende Form erhalten:

$$x'_\nu y'_\nu \partial C_1 + y'_\nu \partial C_2 - x'^2_\nu \partial A_0 - x'_\nu \partial A_1 - \partial A_2 - \sqrt{R(x'_\nu)} \partial B_0$$
$$+ P(x'_\nu) \partial y_\nu + \frac{\partial [P(x'_\nu) y'_\nu - Q(x'_\nu)]}{\partial x'_\nu} \partial x_\nu = 0,$$

$$\xi'_\lambda \eta'_\lambda \partial C_1 + \eta'_\lambda \partial C_2 - \xi'^2_\lambda \partial A_0 - \xi'_\lambda \partial A_1 - \partial A_2 - \sqrt{R(\xi'_\lambda)} \partial B_0 + P(\xi'_\lambda) \partial \eta_\lambda = 0.$$

Hierin sind für ∂C_μ die Ausdrücke (7) zu setzen. Für $n = 1$ wird die Determinante $R_{m,n}$ folgende Form erhalten:

$$R_{2,1} = \begin{vmatrix} x_1'^2 + *, & x_1' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(x_1')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \xi_2'^2 + *, & \xi_2' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(\xi_2')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \xi_3'^2 + *, & \xi_3' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(\xi_3')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \xi_4'^2 + *, & \xi_4' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(\xi_4')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & S_2, & 0, & 0 \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & 0, & S_3, & 0 \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & 0, & 0, & S_4 \end{vmatrix},$$

$$S_\lambda = \frac{\partial^2[P(\xi_\lambda')\eta_\lambda' - Q(\xi_\lambda')]}{\partial \xi_\lambda'^2}. \qquad (\lambda = 2, 3, 4)$$

Die Glieder, welche durch ein Sternchen ersetzt sind, haben die Form:

$$y_\nu' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial A_\mu'} x_\nu'^{m-\pi}, \qquad y_\nu' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial B_\mu'} x_\nu'^{m-\pi},$$

$$\eta_\lambda' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial A_\mu'} \xi_\lambda'^{m-\pi}, \qquad \eta_\lambda' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial B_\mu'} \xi_\lambda'^{m-\pi}.$$

Da die Wurzeln von $Q(x) = 0$ verschieden sind, so sind $\frac{\partial C_\pi'}{\partial A_\mu'}$ und $\frac{\partial C_\pi'}{\partial B_\mu'}$ endlich, wenn y_ν' und η_λ' verschwinden, so verschwinden auch die durch ein Sternchen angedeuteten Glieder. Die Terme von $R_{2,1}$, für welche ein Punkt gesetzt ist, haben auf den Werth der Determinante keinen Einfluss.

$$R_{2,1} = -\Delta_{2,1} \prod_{\lambda=2}^{4} \frac{\partial^2[P(\xi_\lambda')\eta_\lambda' - Q(\xi_\lambda')]}{\partial \xi_\lambda'^2},$$

$$\Delta_{2,1} = \begin{vmatrix} x_1'^2 + *, & x_1' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(x_1')} + * \\ \xi_2'^2 + *, & \xi_2' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(\xi_2')} + * \\ \xi_3'^2 + *, & \xi_3' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(\xi_3')} + * \\ \xi_4'^2 + *, & \xi_4' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(\xi_4')} + * \end{vmatrix}.$$

Allgemein und unabhängig von der speciellen Wahl der Gleichung (5) ergiebt sich:

$$R_{m,n} = \pm \Delta_{m,n} \prod_{\lambda=n+1}^{2m} \frac{\partial^2 [p(\xi_\lambda)\eta_\lambda - q(\xi_\lambda)]}{\partial \xi_\lambda^2},$$

$$\Delta_{m,n} = \begin{vmatrix} x_1^m + *, & x_1^{m-1} + *, & \ldots, & 1 + *, & x_1^{m-2}\sqrt{R(x_1)} + *, & \ldots, & \sqrt{R(x_1)} + * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^m + *, & x_n^{m-1} + *, & \ldots, & 1 + *, & x_n^{m-2}\sqrt{R(x_n)} + *, & \ldots, & \sqrt{R(x_n)} + * \\ \xi_{n+1}^m + *, & \xi_{n+1}^{m-1} + *, & \ldots, & 1 + *, & \xi_{n+1}^{m-2}\sqrt{R(\xi_{n+1})} + *, & \ldots, & \sqrt{R(\xi_{n+1})} + * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{2m}^m + *, & \xi_{2m}^{m-1} + *, & \ldots, & 1 + *, & \xi_{2m}^{m-2}\sqrt{R(\xi_{2m})} + *, & \ldots, & \sqrt{R(\xi_{2m})} + * \end{vmatrix}.$$

Es wird angenommen, dass $\Delta_{m,n}$ für $n = n_1$ nicht identisch verschwindet, so dass die Aufgabe für $n = n_1$ möglich ist und sich die Coefficienten A_μ und B_μ im Allgemeinen nach Potenzen von $(x_1' - x_1)$, $(y_1' - y_1)$, $\ldots$, $(x_{n_1}' - x_{n_1})$, $(y_{n_1}' - y_{n_1})$, $(\eta_{n_1+1}' - \eta_{n_1+1})$, $\ldots$, $(\eta_{2m}' - \eta_{2m})$ entwickeln lassen, aber Δ_{m,n_1-1} soll identisch verschwinden.

Die Determinante Δ_{m,n_1} ist auch algebraische Function jener Veränderlichen; wir schreiben sie in folgender Weise:

$$\Delta_{m,n_1} = \Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n_1} & \\ & \eta_{n_1+1}, \ldots, \eta_{2m} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n_1} & \end{pmatrix}.$$

Es möge Δ_{m,n_1} für $x_\nu = x_\nu'$, $y_\nu = y_\nu'$, $\eta_\lambda = \eta_\lambda'$ nicht verschwinden. Lässt man allen Veränderlichen diese bestimmten Werthe und ändert nur (x_{n_1}, y_{n_1}), aber so, dass dieses Werthenpaar stets der Gleichung (5) genügt, so ist Δ_{m,n_1} eine algebraische Function von x_{n_1}, welche für $x_{n_1} = x_{n_1}'$ von Null verschieden ist, daher auch nicht identisch, sondern nur für eine endliche Anzahl von Werthen verschwindet. Zu diesen Nullstellen gehört der Werth $x = \xi_{n_1}'$, für welchen $y = \eta_{n_1}'$ ist, denn hier wird $\Delta_{m,n_1} = \Delta_{m,n_1-1}$. Obwohl $\Delta_{m,n_1} = 0$ wird, besitzen hier die algebraischen Functionen A_μ und B_μ keinen Pol, denn sie haben die endlichen Werthe: A_μ' und B_μ'.

Werden die Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_1}, \eta_{n_1}, \ldots, \eta_{2m}$ unendlich wenig geändert, so ändert sich auch der Werth von Δ_{m,n_1} unendlich wenig und auch die algebraischen Functionen A_μ und B_μ erhalten eine unendlich kleine Änderung, wenn sie keine Pole an dieser Stelle haben.

In Δ_{m,n_1} setze man folgende Werthe:

$$\eta_{n_1+1} = \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta_{2m} = \eta'_{2m},$$

ferner

$$x_1 = x'_1, y_1 = y'_1, \ldots, x_{n_1-1} = x'_{n_1-1}, y_{n_1-1} = y'_{n_1-1}$$

und schliesslich

$$x_{n_1} = X, \qquad y_{n_1} = Y.$$

Y bedeutet irgend einen Werth in der Nähe von η'_{n_1}. Schliesslich wird aber X so bestimmt, dass die Gleichung besteht:

$$(16) \qquad \Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, X & \\ & \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, Y & \end{pmatrix} = 0$$

und dass X in unendlicher Nähe von ξ'_{n_1} liegt.

Die Coefficienten A_μ, B_μ, welche auf diese Weise gebildet werden, sind von A'_μ, B'_μ unendlich wenig verschieden. Die neue Gleichung bezeichne man mit (17):

$$(17) \qquad P_1(x)y - Q_1(x) = 0.$$

In der Nähe jedes Werthenpaares (x, y), welches der Curve (5) entspricht, gibt es ein Werthenpaar, dass der neuen Gleichung genügt: z. B. möge die Stelle $x = x''_{n_1}, y = y''_{n_1}$, durch welche (17) erfüllt wird, in der Nähe von $x = x'_{n_1}, y = y'_{n_1}$ liegen. Es ist dann

$$(18) \qquad \Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, x''_{n_1} & \\ & \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, y''_{n_1} & \end{pmatrix} \neq 0,$$

da es sich nur unendlich wenig ändert, wenn man x''_{n_1} in x'_{n_1} und y''_{n_1} in y'_{n_1} verwandelt; nach obiger Annahme ist aber Δ_{m,n_1} für $x_\nu = x'_\nu, y_\nu = y'_\nu$ und $\eta_\lambda = \eta'_\lambda$ von Null verschieden.

In der Nähe jedes Werthenpaares (x, y), welches sowohl der Gleichung (5) $P(x)y - Q(x) = 0$ als auch der Gleichung $P'(x)y - Q'(x) = 0$ genügt, muss ein Werthenpaar der neuen Gleichung liegen, welches ein

analoges Verhalten zeigt. Daher giebt es in der Nähe von $(\xi'_{n_1}, \eta'_{n_1})$ ein Werthenpaar $(\xi''_{n_1}, \eta''_{n_1})$, für welches die algebraische Function x von y, welche durch (17) definirt wird, einen einfachen Verzweigungspunkt hat. Da $\Delta_{m,n_1-1} = 0$ ist, so besteht noch folgende Gleichung:

$$(19)\qquad \Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, \xi''_{n_1} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, \eta''_{n_1} \end{pmatrix}, \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m}\Bigg) = 0.$$

Man betrachte schliesslich die algebraische Function von x_{n_1}, y_{n_1}:

$$\Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, x_{n_1} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, y_{n_1} \end{pmatrix}, \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m}\Bigg),$$

in welcher x_{n_1} und y_{n_1} nur solche Werthe annehmen sollen, welche der neuen Gleichung genügen — so dass sie also nur algebraische Function von x_{n_1} ist. Diese Function wird wegen der Gleichung (18) nicht identisch Null, kann also in der Nähe von $x_{n_1} = \xi'_{n_1}$ nur für einen Punkt verschwinden und aus den Gleichungen (16) und (19) folgt, dass

$$\xi''_{n_1} = X, \qquad \eta''_{n_1} = Y.$$

Es ist daher möglich, eine Gleichung (2) zu bilden, welche durch die $(n_1 - 1)$ Werthenpaare $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_{n_1-1}, y'_{n_1-1})$ erfüllt wird und in welcher x ausser für den Punkt $y = \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m}$ noch für $y = Y$ einen einfachen Verzweigungspunkt hat, wenn Y irgend einen Punkt in der Nähe von η'_{n_1} bedeutet. Da $\Delta_{m,n_1} \neq 0$ ist, so sind die Werthe

$$(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_{n_1-1}, y'_{n_1-1}), \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m}$$

ganz beliebig. Obiger Satz kann daher in folgender Weise erweitert werden: Obwohl Δ_{m,n_1-1} identisch verschwindet, ist es möglich, eine Gleichung (2) zu bilden, welche von $(n_1 - 1)$ beliebigen Werthenpaaren (x_ν, y_ν) erfüllt wird und in welcher die algebraische Function x für $(2m - n_1 + 1)$ gegebene Werthe η_λ einfache Verzweigungspunkte hat, so dass die auf Seite 50 gestellte Aufgabe auch für $n_1 - 1$ Werthenpaare (x_ν, y_ν) möglich ist.

Das identische Verschwinden von Δ_{m,n_1-1} drückt also keine Unmöglichkeit der Aufgabe aus, sondern nur eine Unbestimmtheit. Es giebt dann unendlich viele verschiedene Formen (2), welche die betreffenden Bedingungen erfüllen.

Die algebraische Gleichung:

$$\Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n_1-1}, \xi_{n_1} \\ & , \eta_{n_1+1}, \eta_{n_1+2}, \ldots, \eta_{2m} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n_1-1}, \eta_{n_1} \end{pmatrix} = 0,$$

welche bestehen muss, wenn Δ_{m,n_1-1} identisch verschwindet, hat im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Wurzeln ξ_{n_1}, wenn man für x_ν, y_ν und η_λ irgend welche bestimmte Werthe einsetzt, denn Δ_{m,n_1} ist nicht identisch Null. Ferner giebt es nur eine endliche Anzahl von Gleichungen, welche den Werthenpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n_1-1}, y_{n_1-1}), (\xi_{n_1}, \eta_{n_1})$ genügen und bei welcher die algebraische Function x für $y = \eta_{n_1+1}, \ldots, \eta_{2m}$ einfache Verzweigungspunkte hat, folglich giebt es nur eine endliche Anzahl von Gleichungen, welche den Punkten $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n_1-1}, y_{n_1-1})$ genügen und bei welchen x die Verzweigungspunkte $y = \eta_{n_1}, \eta_{n_1+1}, \ldots, \eta_{2m}$ hat. Daher kann Δ_{m,n_1-1} überhaupt nicht identisch verschwinden.

Wenn also Δ_{m,n_1} nicht identisch verschwindet, so ist dieses auch für Δ_{m,n_1-1} nicht der Fall.

Der grösste Werth, welchen n annehmen kann, ist $2m$. Für diesen Fall ist aber leicht zu erkennen, dass:

$$\Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{2m} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{2m} \end{pmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Der Gleichung (5) genügen die Werthenpaare $y = 0, x = \alpha'_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2m)$ wenn α'_ν die Wurzeln von $Q(x)$ bezeichnet. Diese sind alle verschieden; die Glieder von $\Delta_{m,n}$, welche durch ein Sternchen (*) bezeichnet sind, verschwinden für $y = 0$, aber die Determinante in α'_ν ist nicht identisch gleich Null.

Hiermit ist bewiesen, dass die Aufgabe, welche auf Seite 50 gestellt wurde, im Allgemeinen zu lösen ist. Der Fall $n = 0$ hat für unseren Zweck besondere Wichtigkeit. In Folge desselben gilt der Satz:

In der Gleichung (2) *sind die Coefficienten* A_μ, B_μ *und* C_μ *algebraische Functionen der* $2m$ *Verzweigungspunkte* η_λ, *welche die algebraische m-deutige Function* x *von* y *besitzt.*

Im Allgemeinen lassen sich dann für irgend ein endliches Werthsystem $\eta_\lambda = \eta'_\lambda$ die Coefficienten in folgender Form entwickeln:

$$(20)\qquad A_\mu = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{2m}} \alpha_{l_1, l_2, \ldots, l_{2m}} (\eta_1' - \eta_1)^{l_1} (\eta_2' - \eta_2)^{l_2} \ldots (\eta_{2m}' - \eta_{2m})^{l_{2m}}.$$

$l_1, l_2, \ldots, l_{2m}$ sind ganze positive Zahlen, $\alpha_{l_1, l_2, \ldots, l_{2m}}$ bedeutet eine Constante. Für gewisse Werthsysteme, für welche einige algebraische Functionen Pole haben oder unbestimmt sind, giebt es keine solche Entwicklungen. Um die Abhängigkeit der Coefficienten von den Verzweigungspunkten auszudrücken, sollen jene beziehungsweise mit $A_\mu(\eta_\lambda)$, $B_\mu(\eta_\lambda)$ und $C_\mu(\eta_\lambda)$ bezeichnet werden. Wenn für das System η_λ die Werthe der Coefficienten und damit die Gleichung (2) gefunden sind, so ist dieses auch für das System

$$\tau_\lambda = \frac{a\eta_\lambda + b}{c\eta_\lambda + d}$$

der Fall. Man führe zu diesem Zwecke in (2) die Substitution ein:

$$t = \frac{ay + b}{cy + d},$$

dann ergiebt sich:

$$t = \frac{ac[g^2(x) - h^2(x)R(x)] + p(x)[(bc + da)g(x) - (bc - da)h(x)\sqrt{R(x)}]}{c^2[g^2(x) - h^2(x)R(x)] + 2cdp(x)g(x) + d^2p^2(x)}.$$

Nach der Bedingung (4) ist:

$$g^2(x) - h^2(x)R(x) = p(x)r(x),$$

wenn $r(x)$ eine ganze rationale Function m^{ten} Grades in x bedeutet, also

$$(21)\qquad t = \frac{acr(x) + (bc + da)g(x) - (bc - da)h(x)\sqrt{R(x)}}{c^2r(x) + 2cdg(x) + d^2p(x)}.$$

Hieraus sind die Coefficienten $A_\mu(\tau_\lambda)$, $B_\mu(\tau_\lambda)$ und $C_\mu(\tau_\lambda)$ zu berechnen; durch Division von Zähler und Nenner mit einem constanten Factor kann bewirkt werden, dass einer der Coefficienten C_μ den Werth 1 erhält. Jeder Coefficient von $r(x)$, welcher in der Gleichung für y nur im Zähler $q(x)$ eine Rolle spielt, tritt in (21) auch in den Nenner; er ist ebenso wie die Coefficienten $d(x)$, algebraische Function der η_λ. Wenn für ein Werthsystem η_λ einige Coefficienten unendlich werden, so enthält in (21) sowohl Zähler als auch Nenner diese unendlich grossen Werthe und zwar zu derselben

Ordnung; durch Division mit einem geeigneten Factor werden alle Coefficienten in (21) endlich und mindestens ein Coefficient des Zählers und ein Coefficient des Nenners von Null verschieden. Durch obige Substitution können daher die Pole der algebraischen Functionen von η_λ vermieden werden.

Wenn für ein Werthsystem η_λ einige Coefficienten unbestimmt werden, so setze man $\tau_\lambda = \eta_\lambda + b$. Die Coefficienten sind dann entweder algebraische Functionen einer Variabeln b und haben einen bestimmten Werth oder sie sind von b unabhängig und dann Constanten.

Durch continuirliche Änderung des Werthsystems η_λ erhält man immer neue Gleichungen (2), doch ist durch dieselben nicht immer eine bestimmte m-deutige Function x von y definirt. Die Gleichung

$$y = \frac{g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}}{p(x)}$$

zeigt, dass x nicht mehr m-deutige Function von y ist, wenn für ein bestimmtes Werthsystem η_λ, $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ eine gleiche Wurzel $x = x_1$ haben. Es muss dann in (9) die ganze Function $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ von x, deren Wurzeln die Verzweigungspunkte geben, durch $(x - x_1)^2$ theilbar sein; $x = x_1$ ist aber kein Verzweigungspunkt. In der Nähe von η_λ giebt es unendlich viele Werthsysteme $\eta_\lambda + \delta\eta_\lambda$, für welche x eine m-deutige Function von y ist und jede der ganzen Functionen $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ eine Wurzel in der Nähe von x' hat. Für $\eta_\lambda + \delta\eta_\lambda$ hat dann $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ zwei Wurzeln in der Nähe von x', für welche x einen Verzweigungspunkt hat. Die hierzu gehörigen Werthe $\eta_\lambda + \delta\eta_\lambda$ sind unendlich wenig verschieden, wenn sie nicht unendlich gross sind. Sobald sie zusammenfallen, vernichten sie sich gegenseitig, d. h. wenn man um beide in der y-Ebene einen unendlich kleinen Kreis beschreibt und denselben mit der algebraischen Function x durchläuft, so kommt man zu dem Anfangswerth zurück.

Ein specieller Fall der eben behandelten Singularität tritt auf, wenn die Coefficienten B_n sämmtlich verschwinden, ferner wenn die Coefficienten, welche zu x^m und $x^m\sqrt{R(x)}$ gehören, zu Null werden. Haben $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ keine gemeinsamen Factoren — und dieses ist nach Obigem

stets der Fall, wenn alle Werthe des Systems η_λ verschieden und nicht unendlich sind — so erhält man in der Gleichung (2) stets eine algebraische m-deutige Function von x.

Es ist leicht zu erkennen, dass sich der specielle Fall $n = 0$ unserer Aufgabe auch in folgender Weise aussprechen lässt:

Zu jeder m-blättrigen zusammenhängenden Riemannschen Fläche, welche über der y-Ebene construirt ist und 2m einfache Verzweigungspunkte besitzt, lässt sich eine algebraische Function x von der Form

$$y = \frac{g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}}{p(x)}$$

bilden, welche auf derselben eindeutig ist.

Um diesen Satz nachzuweisen, kann angenommen werden, dass kein Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche im Unendlichen liegt. Man gehe von der Gleichung (5) aus, für welche $\eta_\lambda = \eta'_\lambda$ Verzweigungspunkte sind und bilde die Riemannsche Fläche T, auf welcher x eindeutig ist. Die m Blätter von T werden mit $B_1, \ldots, B_\nu, \ldots, B_m$, die Werthe, welche x auf B_ν annimmt, mit x_ν bezeichnet. Für einen Verzweigungspunkt, der B_ν mit B_λ verbindet, ist $x_\nu = x_\lambda$; nur in der Nähe eines solchen Punktes sind zwei Werthe von x unendlich wenig verschieden. Ferner bilde man die Entwicklungen (20).

In diese setze man $\eta_1 = \eta_1 + \delta\eta_1$, während für die anderen Variablen η_λ die Werthe η'_λ gesetzt werden, das heisst, man verschiebe η'_1 continuirlich nach $\eta'_1 + \delta\eta'_1$. Durch diese unendlich kleine Änderung erhält x für jeden Punkt y den Werth $x + \delta x$, der von dem früheren Werthe an dieser Stelle im Allgemeinen unendlich wenig verschieden ist; wenn daher für eine Stelle der y-Ebene die beiden Werthe x_ν und x_μ um eine endliche Grösse verschieden waren, so sind auch $x_\nu + \delta x_\nu$ und $x_\mu + \delta x_\mu$ verschieden. Nur in der Nähe der Verzweigungspunkte von T können durch diese Änderung zwei Werthe gleich werden. Die Punkte η'_λ $(\lambda > 1)$, welche auch nach der Variation Verzweigungspunkte bleiben müssen, verbinden dann genau dieselben Blätter, auf welchen sie vor derselben lagen. Bis auf die Verschiebung von η'_1 und $\eta'_1 + \delta\eta'_1$ ist die Riemannsche Fläche der neuen Function x mit T in allen Verzweigungspunkten und Ver-

zweigungsschnitten congruent. Einer unendlich kleinen Änderung des Systems η_λ entspricht eine unendlich kleine Deformation von T.

Man kann auf diese Weise η'_1 nach einem beliebigen Punkte von T bringen, welcher nicht mit den anderen Verzweigungspunkten zusammenfällt und im Endlichen bleibt. Wenn hierbei kein Verzweigungsschnitt überschritten wird, so verbindet η'_1 dieselben Blätter von T, welche es vor der Bewegung verzweigt hat; es mögen dieses die Blätter B_1 und B_2 sein. Hat η'_1 einen Verzweigungsschnitt S überschritten, welcher B_2 und B_3 verbindet, so wird es auf die Blätter B_1 und B_2 zu liegen kommen. Da x nur einfache Verzweigungspunkte besitzt, so ist jeder derselben nur mit einem anderen durch einen Schnitt verbunden. Wenn dieser Schnitt auf B_ν und B_μ liegt, so soll er mit $S_{\nu,\mu}$ bezeichnet werden. Es sei η'_2 der Verzweigungspunkt, welcher zu η'_1 gehört, und da η'_1 die Blätter B_1 und B_2 verbindet, so kommt dem Schnitt zwischen η'_1 und η'_2 das Zeichen $S_{1,2}$ zu. Nachdem bei der Änderung von η'_1 dieser Punkt einen Schnitt $S_{2,3}$ überschritten hat, kreuzt sich derselbe mit $S_{1,2}$. Um dieses zu vermeiden, muss entweder $S_{2,3}$ verlegt werden, oder es muss auch η'_2 über $S_{2,3}$ bewegt werden, so dass aus $S_{1,2}$ ein Schnitt $S_{1,3}$ wird.

Da T zusammenhängend ist, so kann man von jedem Punkte dieser Fläche zu jedem anderen gelangen und im Besondern auch vom Verzweigungsschnitt $S_{\nu,\mu}$ zu der Fläche B_1. Da es gleichgültig ist, ob man von B_ν oder B_μ ausgeht, so ist es möglich, diesen Weg nach B_1 auszuführen, ohne einen Schnitt $S_{\nu,\mu}$ selbst zu benutzen. Führt man nach einander beide Verzweigungspunkte von $S_{\nu,\mu}$ nach B_1, so wird dieser Schnitt das Blatt B_1 mit irgend einem anderen verbinden. Ein ähnliches Verfahren führe man mit allen Verzweigungspunkten aus, so dass alle auf dem Blatt B_1 liegen. Alsdann haben wir nur Schnitte von der Form $S_{1,\mu}$, und da die neue Fläche zusammenhängend bleibt, so muss auf jedem Blatt B_μ $(\mu \neq 1)$ ein Schnitt liegen, so dass μ mindestens ein Mal die Werthe $2, 3, \ldots, m$ annimmt. Es giebt nur m Schnitte, daher tritt nur ein Zeichen $S_{1,\nu}$ doppelt auf; welchen Werth ν hat, ist vollständig gleichgültig; durch Änderung der Bezeichnung der Blätter kann jede Zahl von 2 bis m für ν angenommen werden. In dem Blatte B_1 können nun alle Verzweigungspunkte beliebig verschoben werden. Die neue Fläche werde mit T_1 bezeichnet. Ebenso wie die beliebige Fläche T in T_1 transformirt werden kann, ist dieses für jede andere m-blätterige Riemannsche Fläche

T' mit $2m$ einfachen Verzweigungspunkten der Fall und folglich kann man mit Hülfe von T_1 auch T in T' überführen.

Da das System η_λ bei dieser Transformation stets im Endlichen bleibt und alle Werthe desselben verschieden sind, so ist die Function x, welche man schliesslich erhält, wohl definirt und hat die verlangte Form. Wir erhalten, wie oben gezeigt wurde, nur dann keine Function von der verlangten Eigenschaft, wenn man zwei solche Verzweigungspunkte zusammenfallen lässt, welche dieselben Blätter verbinden, so dass sie sich aufheben. Nähert man aber einen Verzweigungspunkt, der auf B_1 und B_2 liegt, und einen Verzweigungspunkt, der B_2 und B_3 verbindet, so heben sie sich nicht auf, die neue Function x behält die verlangte Form und hat einen dreifachen Verzweigungspunkt, der B_1, B_2 und B_3 verbindet.

Daher kann man auch zu jeder Fläche T_1, bei welcher die $2m$ einfachen Verzweigungspunkte in beliebiger Weise zu mehrfachen Verzweigungspunkten zusammenfallen, die Function x bilden, und obiger Satz ist allgemein bewiesen.

Wir wenden denselben auf eine Riemannsche Fläche T an, welche zu der algebraischen m-deutigen Function v von u gehört, die durch die algebraische Gleichung

$$F(u, v) = 0 \tag{22}$$

definirt ist, welche vom Geschlechte Eins ist, so dass v im Allgemeinen $2m$ Verzweigungspunkte besitzt. Es sei:

$$u = \frac{g_1(x) + h_1(x)\sqrt{R(x)}}{p_1(x)} \tag{23}$$

die algebraische Function x von u, welche zu dieser Fläche gehört. Eliminirt man aus (22) und (23) die Variable u, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen v und $(x, \sqrt{R(x)})$ und da zu jedem Punkte von T nur ein Werthenpaar $\{v; x, \sqrt{R(x)}\}$ gehört und ferner jeder Stelle $(x, \sqrt{R(x)})$ nur ein Punkt auf T entspricht, so entspricht jedem $(x, \sqrt{R(x)})$ nur ein Werth v und die algebraische Gleichung zwischen v und x hat die Form:

$$v = \frac{g_2(x) + h_2(x)\sqrt{R(x)}}{p_2(x)}.$$

Bei dieser Darstellung von u und v durch den Parameter x entspricht jedem Werthenpaar (u, v) der Gleichung (22) nur eine Stelle $(x, \sqrt{R(x)})$, wie leicht zu erkennen ist.

Wie am Anfange dieses Abschnittes erwähnt wurde, können x und $\sqrt{R(x)}$ mit Hilfe der Gleichung $\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 - R(x) = 0$ als eindeutige Functionen des Parameters z ausgedrückt werden. Es sind dann auch u und v eindeutige Functionen von z.

Wenn die Gleichung (22) vom Geschlecht Null ist, so hat v als Function von u nur $2m - 2$ Verzweigungspunkte; in diesem Falle können u und v als Functionen von x und $\sqrt{R(x)}$ ausgedrückt werden, wenn $\sqrt{R(x)}$ vom zweiten oder nullten Grade in x ist, und zwar sind für jede Gleichung (22) vom Geschlechte Null beide Fälle möglich.

III.

In dem Abschnitt I wurde gezeigt, dass die Differentialgleichung (1):

$$(1) \qquad f(u, U) = 0, \qquad U = \frac{du}{dz},$$

folgende Form haben muss, wenn u eine eindeutige Function von z ist:

$$U^m + f_1(u) U^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(u) U + f_m(u) = 0;$$

$f_1(u)$, $f_2(u)$ u. s. w. bedeuten ganze rationale Functionen von u und zwar ist $f_1(u)$ höchstens vom 2ten Grade in u, $f_2(u)$ höchstens vom 4ten Grade und $f_m(u)$ höchstens vom Grade $2m$. Da (1) eine irreductible Gleichung sein soll, so darf $f_m(u)$ nicht identisch verschwinden.

In Folge dieser nothwendigen Eigenschaft kann (1) durch eine Substitution von der Form:

$$u = \frac{1}{w} + a, \qquad U = -\frac{1}{w^2} W$$

stets in eine solche Gleichung transformirt werden, dass der Quotient: $\frac{1}{w^2} W$ für $w = \infty$ m verschiedene Werthe erhält, welche sämmtlich von Null verschieden sind. Für $w = \infty$ wird nämlich obige Gleichung auf folgende Glieder reducirt:

$$(2) \qquad \left(\frac{W}{w^2}\right)^m - f_1(a)\left(\frac{W}{w^2}\right)^{m-1} + \dots \mp f_{m-1}(a) \cdot \frac{W}{w^2} \pm f_m(a) = 0.$$

Die algebraische Gleichung (2) zwischen a und $\left(\frac{W}{w^2}\right)$ ist irreductibel; es kann daher a stets so gewählt werden, dass obige Bedingungen für die Wurzeln $\frac{W}{w^2}$ erfüllt werden.

Diese neue Gleichung zwischen w und W:

$$(3) \qquad \Phi(w, W) = 0$$

ist auch eine Differentialgleichung von der Form (1), wenn $W = \frac{dw}{dz}$ gesetzt wird und es ist dann w eine eindeutige Function von z, wenn dieses für u der Fall ist und umgekehrt. Man erhält für $w = \infty$ m verschiedene Entwicklungen von der Form:

$$(4) \qquad W = A_\mu w^2 + A'_\mu w^3 + \dots \qquad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

$A_1, A_2, \dots, A_\mu, \dots, A_m$ sind die Wurzeln $\frac{W}{w^2}$ der Gleichung (2).

Betrachtet man (3) als algebraische Curve der rechtwinkligen Coordinaten w und W, so hat dieselbe für $w = \infty$ und $W = \infty$ m verschiedene Zweige, welche sich sämmtlich in zwei Punkten berühren. Die algebraische Curve hat daher im Unendlichen $m(m-1)$ Doppelpunkte.

Wenn w eine eindeutige Function von z ist, so muss die Gleichung (3), wie im Abschnitt I gezeigt wurde, noch folgende nothwendige Bedingungen erfüllen:

1) Das Geschlecht der Curve (3) muss niedriger als zwei sein.

2) Wenn $w = a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ die Wurzeln von $\Phi(w, 0) = 0$ sind, so muss die Entwicklung von W nach $(w - a_\nu)$ folgende Form haben:

$$(5) \qquad W = B_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu}{k_\nu + 1}} + B'_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \dots$$

Hierin bedeuten k_ν und l_ν ganze positive Zahlen, welche auch gleich Null sein können. Ist das Geschlecht von (3) gleich Eins, so muss l_ν stets verschwinden. Ist aber das Geschlecht von (3) gleich Null, so kann l_ν höchstens für zwei verschiedene Stellen a_ν grösser als Null sein, und Σl_ν muss kleiner als 3 sein.

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichende Bedingungen dafür, dass w eindeutige Function von z ist. Der Beweis ist leicht zu geben.

Da das Geschlecht von (3) kleiner als zwei ist, so lassen sich w und W eindeutig mit Hülfe eines Parameters ζ ausdrücken, und zwar betrachten wir insbesondere die Darstellung, welche im Abschnitt II entwickelt wurde:

$$(6)\qquad \begin{aligned} w &= \frac{g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}}{p(x)}, \\ W &= \frac{G(x) + H(x)\sqrt{R(x)}}{P(x)}, \end{aligned} \qquad \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 - R(x) = 0.$$

Es sollen hier nur solche Darstellungen gewählt werden, für welche w nicht unendlich wird, wenn x unendlich gross wird oder verschwindet; dieses kann durch eine Substitution erreicht werden. Auch wurde oben gezeigt, dass bei diesen Darstellungen von w und W jedem Werthenpaare (w, W), welches der Gleichung (3) genügt, nur ein Werthenpaar $(x, \sqrt{R(x)})$ entspricht. Zu jedem Werthe w gehören daher m Stellen $(x, \sqrt{R(x)})$ und den m verschiedenen Zweigen für $w = \infty$ müssen m verschiedene Werthenpaare $(x, \sqrt{R(x)})$ entsprechen. Es hat dann $p(x)$ nur einfache Wurzeln. Ferner zeigt die Form der Entwicklungen (4), welche für $w = \infty$ gelten, dass $P(x) = p^2(x)$ sein muss.

Man vergleiche W und $\frac{dw}{d\zeta}$.

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{p(x)\frac{d}{dx}\left(g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}\right) - \frac{dp(x)}{dx}\left(g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}\right)}{p^2(x)}\sqrt{R(x)}.$$

Nur für $w = \infty$ werden W und $\frac{dw}{d\zeta}$ unendlich, aber $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$ bleibt hier endlich. Dieser Quotient kann daher nur unendlich werden, wenn W verschwindet. Für $W = 0$ gelten die Entwicklungen welche durch die Be-

dingung (2) bestimmt werden. Es kann angenommen werden, dass für $w = a_\nu$ der Parameter x nicht unendlich gross wird. Der Entwicklung (5) entspricht dann eine Entwicklung von w nach $(x - x_\nu)$, welche zweideutig ist, wenn $\sqrt{R(x_\nu)} = 0$ ist:

$$w - a_\nu = C_\nu (x - x_\nu)^{\frac{p_\nu}{2}} + C'_\nu (x - x_\nu)^{\frac{p_\nu + 1}{2}} + \ldots \qquad p_\nu \geq 1.$$

Setzt man dieselbe in (5) ein, so muss sich W in gleicher Weise nach $(x - x_\nu)$ entwickeln. Folglich ist, wenn $R(x_\nu) \neq 0$, $\left(\frac{p_\nu}{2}\right) = q_\nu(k_\nu + 1)$, im anderen Falle: $p_\nu = q_\nu(k_\nu + 1)$; hier bedeutet q_ν eine ganze positive Zahl.

$$\frac{dw}{dx}\frac{dx}{d\zeta} = \left\{ \frac{p_\nu}{2} C_\nu (x - x_\nu)^{\left(\frac{p_\nu}{2}\right) - 1} + \ldots \right\} \sqrt{R(x)}.$$

Wenn die Entwicklungen nach ganzen Potenzen fortschreiten, so ist:

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(x_\nu)} + R_1(x - x_\nu) + \ldots,$$

daher:

$$\frac{dw}{d\zeta} = D_\nu (w - a_\nu)^{\frac{\left(\frac{p_\nu}{2}\right) - 1}{\left(\frac{p_\nu}{2}\right)}} + \ldots; \quad \frac{\left(\frac{p_\nu}{2}\right) - 1}{\left(\frac{p_\nu}{2}\right)} > \frac{k_\nu}{k_\nu + 1}, \quad \text{wenn } k_\nu \gtreqless 1.$$

Im anderen Falle ist $\sqrt{R(x)} = R_1(x - x_\nu)^{\frac{1}{2}} + \ldots$

$$\frac{dw}{d\zeta} = D_\nu (w - a_\nu)^{\left(\frac{p_\nu - 1}{p_\nu}\right)} + \ldots; \quad \frac{p_\nu - 1}{p_\nu} > \frac{k_\nu}{k_\nu + 1}, \quad \text{wenn } k_\nu \gtreqless 1.$$

Wenn daher in (5) $l_\nu = 0$ ist, so ist, weil dann $k_\nu \gtreqless 1$ sein muss, der niedrigste Exponent von $(w - a_\nu)$ in der Entwicklung von $\frac{dw}{d\zeta}$ grösser als der kleinste Exponent von $(w - a_\nu)$ in der Entwicklung von W. Der Quotient $\frac{1}{W}\frac{dw}{d\zeta}$ wird dann für $w = a_\nu$ nicht unendlich.

Hat die Gleichung (3) das Geschlecht Eins, in welchem Falle $R(x)$ vom vierten Grade ist, so verlangt die Bedingung (2), dass stets $l_\nu = 0$ ist. Es wird also jener Quotient $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$ niemals unendlich.

Hat die Gleichung (3) das Geschlecht Null, so können w und W als rationale Functionen von x dargestellt werden, so dass in den Formeln (6): $\frac{dw}{d\zeta} = \sqrt{R(x)}$ eine Constante wird. Wird auch hier l_ν stets Null, so kann $\frac{dw}{dx}\frac{1}{W}$ nie unendlich werden. Es kann aber auch l_ν an zwei Stellen z. B. für a_1 und a_2 gleich Eins werden. Durch eine lineare Substitution kann immer erreicht werden, dass für $x = \infty$ w nicht gleich a_1 oder a_2 wird. Es mögen vielmehr diesen Stellen, für welche die Entwicklungen (5) gelten, die endlichen Werthe x_1 beziehungsweise x_2 entsprechen, und man kann w, W und $\frac{dw}{dx}$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_1$ entwickeln:

$$w - a_1 = C_1(x - x_1)^{q(k_1+1)} + \dots, \qquad q > 0,$$

$$W = C_1'(x - x_1)^{q(k_1+1)} + \dots,$$

$$\frac{dw}{dx} = q(k_1 + 1)C_1(x - x_1)^{q(k_1+1)-1} + \dots,$$

$$\frac{dw}{dx}\frac{1}{W} = \frac{q(k_1 + 1)C_1}{C_1'}\frac{1}{x - x_1} + \dots.$$

Ebenso wird $\frac{dw}{dx}\frac{1}{W}$ unendlich für $x = x_2$. An die Stelle von x substituirt man folgende eindeutige Function von ζ:

$$\log\frac{x - x_1}{x - x_2} = \zeta, \qquad x = \frac{x_1 - x_2 e^\zeta}{1 - e^\zeta}$$

und betrachtet den Quotienten

$$\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W} = \frac{dw}{dx}\frac{1}{W}\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Auch dieser Quotient könnte nur unendlich werden für $w = a_1$ und $w = a_2$, d. h. für $x = x_1$ und $x = x_2$; derselbe bleibt aber hier endlich.

Schliesslich kann noch l_ν für eine der Stellen a_ν z. B. für $a_\nu = a_1$ den Werth 2 erhalten. Dann betrachten wir wieder eine solche Darstellung von w und W als rationale Functionen von x, in welcher der Punkt $x = \infty$ nicht der Entwicklung (5) für $w = a_1$ entspricht. Es

möge demselben vielmehr ein endlicher Werth x_1 entsprechen. Für $x = x_1$ hat man die Entwicklung:

$$w - a_1 = C_1(x - x_1)^{q(k_1+1)} + \ldots, \qquad q \geqq 1.$$

Durch Umkreisung des Punktes $w = a_1$ erhält man für einen Punkt in der Nähe von a_ν, z. B. für $w = w'$, $q(k_1 + 1)$ verschiedene Werthe x; zu gleicher Zeit erhält man aber nur $k_1 + 1$ verschiedene Werthe W in Folge der Entwicklung (5), da aber bei jeder Darstellung von der Form (6) jedem Werthenpaare (w, W) nur eine Stelle x entspricht, so muss $q = 1$ sein.

$$\left.\begin{aligned} W &= C_1'(x - x_1)^{k_1+2} + \ldots. \\ \frac{dw}{dx} &= (k_1 + 1)C_1(x - x_1)^{k_1} + \ldots. \end{aligned}\right\} \frac{dw}{dx}\frac{1}{W} = \frac{(k_1+1)}{C_1'}\frac{1}{(x - x_1)^2} + \ldots.$$

Man führe folgende Substitution ein:

$$\frac{1}{x - x_1} = \zeta, \qquad x = \frac{x_1\zeta + 1}{\zeta},$$

so dass w und W eindeutige Functionen von ζ sind. Der Quotient $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$ kann nur für $w = a_1$ unendlich werden.

$$\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W} = -\frac{dw}{dx}\frac{1}{W}(x - x_1)^2.$$

Doch diese letzte Gleichung zeigt, dass auch an der Stelle $w = a_1$, $W = 0$ der Quotient endlich bleibt.

In jedem Falle haben wir eine solche Darstellung von w und W als eindeutige Functionen von ζ gefunden, dass $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$, welches auch algebraische Function von w ist, für keinen Werth unendlich wird, d. h. es ist gleich einer Constanten C:

$$\frac{dw}{d\zeta} = CW.$$

Setzt man $C\zeta = z$, so wird

$$\frac{dw}{dz} = W.$$

Wenn daher die Gleichung zwischen w und W jene nothwendigen Bedingungen erfüllt, so kann eine solche eindeutige Darstellung von w und W nach einem Parameter z gefunden werden, dass W die Ableitung von w nach z ist.[1]

Es ist hiermit folgendes Kriterium abgeleitet worden:

Eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u und $\frac{du}{dz}$, welche die Variable z nicht explicite enthält:

$$f_0(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(u)\left(\frac{du}{dz}\right) + f_m(u) = 0$$

hat ein eindeutiges Integral, wenn sie folgende nothwendige Bedingungen erfüllt:

1. Das Geschlecht der algebraischen Gleichung muss kleiner als Zwei sein.

2. Der Coefficient von $\left(\frac{du}{dz}\right)^\nu$, welcher mit $f_\nu(u)$ bezeichnet ist, muss eine ganze rationale Function in u sein, die höchstens vom Grade 2ν ist. Man kann dann durch eine Substitution von der Form:

$$u = \frac{1}{w} + a, \qquad \frac{du}{dz} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dz}$$

eine algebraische Gleichung zwischen w und $\frac{dw}{dz}$ erhalten, welche für $w = \infty$ m verschiedene Wurzeln $\frac{dw}{dz}\frac{1}{w^2}$ hat, von denen keine verschwindet.

3. In dieser neuen Gleichung zwischen w und $\frac{dw}{dz}$ möge $\frac{dw}{dz}$ verschwinden für $w = a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, a_n$; die Entwicklungen von $\frac{dw}{dz} = 0$ nach $w - a_\nu$ mögen folgende Form haben:

$$W = B_\nu(w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu}{k_\nu + 1}} + B'_\nu(w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \ldots.$$

Hierin sind $B_\nu, B'_\nu, \ldots$ Constanten, k_ν und l_ν sind ganze Zahlen; dieselben müssen aber $\geqq 0$ sein.

[1] Auf ähnliche Weise lässt sich direkt aus der Darstellbarkeit von w und W in der Form (6) die Nothwendigkeit jener Bedingungen nachweisen.

4. Wenn das Geschlecht der algebraischen Gleichung gleich Eins ist, so muss l_ν stets $= 0$ sein.

Wenn aber die Gleichung das Geschlecht Null hat, so muss $\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu < 3$ sein.

Am Anfange dieser Arbeit ist das Theorem von BRIOT und BOUQUET mitgetheilt worden. Der Vergleich ergiebt nun, dass die Bedingung (4) jenes Theorems hier durch die Transformation $u = \frac{1}{w} + a$ ersetzt ist. Ein wesentlicher Unterschied ist nur darin zu erkennen, dass hier eine Bedingung für das Geschlecht und die Bedingung (4) auftreten, während das Theorem von BRIOT und BOUQUET verlangt, dass die algebraische Function W keine Verzweigungspunkte hat, wenn $W \neq 0$ ist.

Es schien von Interesse, die Beziehung, in welcher diese verschiedenen Bedingungen nothwendig stehen müssten, direkt nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke betrachte man die Resultante, welche sich durch Elimination von W aus den Gleichungen:

$$\Phi(w, W) = W^m + f_1\left(\frac{1}{w} + a\right)w^2 W^{m-1} + \ldots + f_m\left(\frac{1}{w} + a\right)w^{2m} = 0,$$

$$\frac{d}{dW}\Phi(w, W) = m W^{m-1} + (m-1)f_1\left(\frac{1}{w} + a\right)w^2 W^{m-2} + \ldots$$
$$+ f_{m-1}\left(\frac{1}{w} + a\right)w^{2m-1} = 0$$

ergiebt.

Wenn man kurz $w^2 f_1\left(\frac{1}{w} + a\right)$ mit f_1, $w^4 f_2\left(\frac{1}{w} + a\right)$ mit f_2 u. s. w. bezeichnet, so heisst diese Resultante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & f_1, & f_2, & \ldots, & f_m, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & f_1, & \ldots, & f_{m-1}, & f_m, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_m \\ m, & (m-1)f_1, & (m-2)f_2, & \ldots, & f_{m-1}, & 0, & \ldots, & \ldots, & 0 \\ 0, & m, & (m-1)f_1, & \ldots, & 2f_{m-2}, & f_{m-1}, & \ldots, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Der Grad von $\Delta = 0$ in w giebt die Anzahl der Schnittpunkte von obigen beiden Gleichungen im Endlichen an. Dieser Grad ist nur abhängig von denjenigen Gliedern in $f_1, f_2, \ldots$, welche die höchsten Potenzen von w enthalten. In f_1 ist $f_1(a)w^2$ dieses Glied, in f_2 ist es $f_2(a)w^4$ u. s. w., daher wird die folgende Determinante D von demselben Grad sein wie Δ:

$$D = \begin{vmatrix} 1, & f_1(a)w^2, & f_2(a)w^4, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & f_1(a)w^2, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_m(a)w^{2m} \\ m, & (m-1)f_1(a)w^2, & (m-2)f_2(a)w^4, & \ldots, & 0 \\ 0, & m, & (m-1)f_1(a)w^2, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{m-1}(a)w^{2m-2} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist aber die Discriminante von:

(7) $$W^m + f_1(a)w^2W^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(a)w^{2m-2}W + f_m(a)w^{2m} = 0,$$

(8) $$mW^{m-1} + (m-1)f_1(a)w^2W^{m-2} + \ldots + f_{m-1}(a)w^{2m-2} = 0.$$

Die erstere von diesen beiden Gleichungen kann auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$(W - A_1w^2)(W - A_2w^2)\ldots(W - A_mw^2) = 0.$$

$A_1, A_2, \ldots$ sind die Wurzeln von (2), also sämmtlich verschieden von einander. Diese Gleichung stellt ein System von m Parabeln vor. Ebenso repräsentirt die Gleichung (8) ein System von $(m-1)$ Parabeln; keine derselben ist mit einer Parabel von (7) identisch, da die Wurzeln $A_1, A_2, \ldots$ verschieden sind. Für endliche Werthe von w und W hat jede Parabel in (7) nur den Scheitelpunkt $w = 0$ und $W = 0$ mit den Parabeln (8) gemeinsam, und zwar ist es ein zweifacher Schnittpunkt, da sich sämmtliche Parabeln hier berühren. Folglich hat jede Parabel von

(7) mit den Curven (8) im Endlichen $2(m-1)$ gemeinsame Punkte, und die Gleichung (7) mit der Gleichung (8) $2m(m-1)$ gleiche Wurzeln:

$$w = 0.$$

Es ist:

$$D = Cw^{2m(m-1)}.$$

Auch Δ ist daher vom Grade $2m(m-1)$ in w.

Man betrachte $\Phi(w, W) = 0$ als algebraische Curve der rechtwinkligen Coordinaten w und W. Aus der Theorie der algebraischen Curven ist bekannt, dass jeder endliche Werth, für welchen eine Parallele zur W-Axe einfache Tangente an die Curve $\Phi(w, W) = 0$ ist, eine einfache Wurzel der Resultante $\Delta = 0$ sein muss, dass ferner jeder endliche Werth w, der zu einem Doppelpunkte gehört, zweifache Wurzel und jeder endliche Werth w, für den die Curve einen Rückkehrpunkt hat, dreifache Wurzel der Resultante $\Delta = 0$ ist.

Man bezeichne die Anzahl der Doppelpunkte im Endlichen mit d, die Anzahl der Rückkehrpunkte im Endlichen, für welche $W = 0$ ist, mit r, und für welche $W \neq 0$ ist mit r'. Schliesslich sei die Anzahl der Tangenten vom unendlich fernen Punkte der W-Axe, für welche w endlich und $W = 0$ ist, gleich t; wenn dagegen $W \neq 0$ ist, so nenne man die Anzahl derselben t'. Es ist dann:

$$2m(m-1) = t + t' + 2d + 3(r + r'),$$

$$(9) \qquad 2(d + r + r') = 2m(m-1) - (t + r + t' + r').$$

Für jede k-fache Tangente vom unendlich fernen Punkte der W-Axe und für jeden k-fachen Rückkehrpunkt hat die algebraische Function W von w einen k-fachen Verzweigungspunkt; $t + r$ ist folglich die Anzahl der Verzweigungspunkte von W, für welche $W = 0$ ist, und $t' + r'$ die Anzahl dieser Verzweigungspunkte von W, für welche $W \neq 0$ ist.

Nach einer nothwendigen Bedingung, welche in beiden Kriterien besteht, muss für $W = 0$ und $w = a_\nu$ folgende Entwicklung gelten:

$$W = B_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu}{k_\nu + 1}} + B'_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \dots, \qquad l_\nu \gtreqless 0.$$

Für $W = 0$ ist folglich die Anzahl der Verzweigungspunkte $(t + r)$ gleich Σk_ν.

Es giebt $\Sigma(k_\nu + l_\nu)$ die Anzahl der Wurzeln der Gleichung:

$$\Phi(w, 0) = 0$$

an, also:

$$\Sigma(k_\nu + l_\nu) = 2m, \qquad t + r + \Sigma l_\nu = 2m.$$

Die algebraische Curve $\Phi(w, W) = 0$ hat im Unendlichen keine Rückkehrpunkte, dagegen eine bekannte Anzahl d' von Doppelpunkten (siehe Seite 63)

$$d' = m(m - 1).$$

Aus der Gleichung (9) ergiebt sich dann:

$$2(d + d' + r + r') = 4m(m - 1) - 2m + (\Sigma l_\nu - t' - r').$$

Es ist nun $d + d' + r + r'$ die Anzahl sämmtlicher Doppel- und Rückkehrpunkte, welche die Curve (3) besitzt. Nennt man p das Geschlecht der Curve, so ist

$$p = \frac{(2m - 1)(2m - 2)}{2} - (d + d' + r + r'),$$

$$p = 1 + \frac{t' + r'}{2} - \frac{\Sigma l_\nu}{2}. \tag{10}$$

Nach dem Kriterium, welches in diesem Abschnitte abgeleitet wurde, soll für $p = 1$ auch $\Sigma l_\nu = 0$, für $p = 0$ aber $\Sigma l_\nu < 3$ sein. In beiden Fällen muss also $t' + r' = 0$ sein, d. h. für $W \neq 0$ darf es keine Verzweigungspunkte geben. Auch ergiebt sich, dass für $p = 0$ $\Sigma l_\nu = 2$ ist.

Sollte $t' + r'$ nicht verschwinden, so ist der Widerspruch nur dadurch zu erklären, dass die algebraische Gleichung reductibel ist.

Nach dem Theorem von Briot und Bouquet soll $t' + r' = 0$ sein. Für diesen Fall zeigt die Formel (10), dass $p < 2$ sein muss; ferner wenn $p = 1$, so ist $\Sigma l_\nu = 0$, im anderen Falle gleich 2.[1]

[1] Auf diese Weise würde sich auch der Satz ergeben, welcher von Briot und Bouquet aufgestellt ist, dass wenn l_ν diese Bedingung nicht erfüllt, die Gleichung (3) reductibel ist.

In dem Werke von BRIOT und BOUQUET: *Théorie des fonctions elliptiques* sind mit Hülfe des dort entwickelten Kriteriums die binomischen und trinomischen Differentialgleichungen aufgestellt, welche ein eindeutiges Integral besitzen. Die hier aufgestellten Bedingungen führen natürlich zu denselben Resultaten; da in beiden Kriterien einzelne Bedingungen gleich sind, so wird auch die betreffende Untersuchung mit derjenigen, welche die Herren BRIOT und BOUQUET geführt haben, in einigen Punkten übereinstimmend sein. Es wird im Folgenden nur auf den Unterschied beider Methoden aufmerksam gemacht. Zum Schlusse wird das eindeutige Integral einer einfachen Differentialgleichung berechnet, welche in dem Werke von BRIOT und BOUQUET nicht behandelt ist.

A. Binomische Gleichungen.

Wie oben erwähnt, hat Herr FUCHS die Formen der binomischen Differentialgleichungen aufgestellt, welche ein eindeutiges Integral besitzen, dadurch dass er den Satz vom Geschlecht der algebraischen Gleichungen zu Grunde legte. Indem hierauf verwiesen wird, geben wir nur die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte, welche jede dieser Formen besitzen.

Die betreffenden Differentialgleichungen sind:

(1) $$U^2 + G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d) = 0,$$

(2) $$U^3 + G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2 = 0,$$

(3) $$U^4 + G(u-a)^2(u-b)^3(u-c)^3 = 0,$$

(4) $$U^6 + G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^5 = 0,$$

(5) $$U - G(u-a)(u-b) = 0,$$

(6) $$U^2 - G(u-a)^2(u-b)(u-c) = 0,$$

(7) $$U - G(u-a)^2 = 0,$$

(8) $$U^m - G(u-a)^{m+1}(u-b)^{m-1} = 0.$$

Die Curve (1) hat im Unendlichen 2 Doppelpunkte, im Endlichen keinen Doppel- und Rückkehrpunkt. Die Curve (2) hat im Unendlichen 6 Doppelpunkte. Dem Punkt $U = 0$, $u = a$ entspricht ein einfacher

Rückkehrpunkt, dasselbe ist für $U = 0$ und $u = b$ resp. $u = c$ der Fall. Die Curve (3) besitzt im Unendlichen 12 Doppelpunkte. Im Punkte $U = 0$ und $u = a$ berühren sich 2 Zweige in einer zur U-Axe parallelen Geraden; es giebt hier 2 Doppelpunkte. Durch den Punkt $U = 0$, $u = b$ geht nur ein Zweig, derselbe repräsentirt zwei Rückkehrpunkte und einen Doppelpunkt; dasselbe ist für $U = 0$ und $u = c$ der Fall. Im Unendlichen der Curve (4) liegen 30 Doppelpunkte, für $U = 0$ und $u = a$ berühren sich 3 Zweige, es giebt hier 6 Doppelpunkte. Durch den Punkt $U = 0$ und $u = b$ gehen zwei Zweige, in beiden beginnt die Entwicklung von U nach $(u - b)$ mit der Potenz $(u - b)^{\frac{2}{3}}$, es fallen hier 2 Rückkehrpunkte zusammen, welche sich in 6 Doppelpunkten schneiden. Für $U = 0$ und $u = c$ giebt es nur eine Entwicklung nach $(u - c)$, dieselbe repräsentirt 6 Doppelpunkte und 4 Rückkehrpunkte. Berechnet man hiernach für diese 4 Curven das Geschlecht, so ergiebt sich dasselbe bei allen gleich Eins.

Die Curve (5) hat keinen Doppel- und Rückkehrpunkt, die Curve (6) besitzt im Unendlichen 2 und für $U = 0$ und $u = 0$ einen Doppelpunkt. Die Parabel (7) kann keinen Doppelpunkt besitzen und die Curve (8) endlich hat $m(m - 1)$ Doppelpunkte im Unendlichen; für $U = 0$ und $u = a$ ist nur eine Entwicklung nach $(u - a)$ möglich, die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte an dieser Stelle ist $\frac{1}{2} m(m - 1)$, unter diesen giebt es $(m - 1)$ Rückkehrpunkte. Ebenso giebt es für $U = 0$ und $u = b$ nur eine Entwicklung von u nach Potenzen von U, unter den

$$\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$$

Doppel- und Rückkehrpunkten giebt es $m - 2$ Rückkehrpunkte. Die Curven von (5) bis (8) sind vom Geschlecht Null.[1]

B. Trinomische Gleichungen.

$$(1) \qquad U^m + f_1(u) U^{m-1} + f_m(u) = 0.$$

Im Unendlichen liegen $m(m - 1)$ Doppelpunkte. Diejenigen Rück-

[1] Es wurde bei dieser Bestimmung der Singularität eines Punktes die Methode benutzt, welche Herr NÖTHER in den Göttinger Nachrichten 1871 angegeben hat.

kehr- und Doppelpunkte, welche im Endlichen liegen und für die $U \neq 0$ ist, müssen ausser obiger noch folgenden Gleichungen genügen:

$$(2) \qquad mU + (m-1)f_1(u) = 0.$$

$$(3) \qquad f_1(u)U^{m-1} + f_m(u) = 0.$$

Die Elimination von U aus (1) und (2) ergiebt:

$$(-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} f_1^m(u) + f_m(u) = 0 = P(u).$$

Aus (2) und (3) erhält man:

$$(-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^{m-1}} f_1^{m-1}(u)f_1'(u) + f_m'(u) = 0 = Q(u).$$

Es ist daher:

$$Q(u) = \frac{dP(u)}{du}.$$

Der Werth u, welcher zu einem Doppelpunkt gehört, muss Wurzel von $P(u)$ und von $Q(u)$ sein, d. h. er ist mindestens zweifache Wurzel von $P(u)$. Es ist somit nöthig zu bestimmen, wie viele Doppel- resp. Rückkehrpunkte zu einer mehrfachen Wurzel von $P(u)$ gehören. Hierzu wird folgende eindeutige Transformation eingeführt:

$$U = V - \frac{m-1}{m} f_1(u),$$

deren Fundamentalpunkte im Unendlichen liegen.

Die transformirte Gleichung (1) heisst:

$$(4) \qquad V^m + \dots + (-1)^{m-1} \cdot \frac{(m-1)^{m-2}}{2m^{m-3}} \cdot f_1^{m-2}(u) \cdot V^2 + P(u) = 0.$$

Wenn $u = u_1$ gemeinsame Wurzel von $P(u)$ und $f_1(u)$ ist, so hat auch $f_m(u)$ diese Wurzel und U wird für $u = u_1$ verschwinden. Hier sollen aber nur solche Doppelpunkte betrachtet werden, für welche $U \neq 0$ ist; für diese ist dann auch $f_1(u) \neq 0$. Es sei $u = u_1$ eine p-fache Wurzel von $P(u)$; wenn $p = 2\rho$ also eine gerade Zahl ist, so berühren sich an dieser Stelle zwei Äste von (4) in ρ Punkten und bilden ρ Doppelpunkte.

Ist dagegen $p = 2\rho + 1$, so giebt es an dieser Stelle nur einen Zweig, derselbe bildet einen Rückkehrpunkt, dessen beide Seiten sich noch in $\rho - 2$ Punkten berühren, so dass es $\rho - 2$ Doppelpunkte und einen Rückkehrpunkt giebt. Da $P(u)$ vom Grade $2m$ ist, so giebt es höchstens m Doppelpunkte und dieses ist der Fall, wenn $P(u)$ ein vollständiges Quadrat ist. Eine gleiche Anzahl Doppelpunkte hat (1) selbst.

Betrachtet man z. B. die Curve:

$$U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + C(u-a')(u-b')(u-c')(u-d')(u-e')(u-f') = 0.$$

Diese erfüllt die Bedingungen (3) und (4) des Kriteriums auf Seite 68. Im Unendlichen liegen 6 Doppelpunkte, für $U = 0$ giebt es keinen singulären Punkt, daher müssen noch 3 Doppelpunkte für $U \neq 0$ vorhanden sein, d. h.

$$P(u) = \frac{4}{27} f_1^3(u) + f_6(u)$$

muss ein vollständiges Quadrat sein, damit die Curve das Geschlecht Eins hat. Hierdurch werden den 10 Coefficienten $a, b, a', \ldots$ 3 Bedingungen auferlegt.

Eine Gleichung 10ter Ordnung, welche den Bedingungen (3) und (4) genügt, ist:

$$U^5 + A(u-a)(u-b)U^4 + C(u-a)^4(u-b)^4(u-c')^2 = 0.$$

Im Unendlichen liegen 20 Doppelpunkte. Dem Punkte $U = 0$ und $u = a$ entspricht eine Entwicklung nach $(u-a)$, welche mit der Potenz $(u-a)^{\frac{4}{5}}$ beginnt, dieselbe repräsentirt 3 Doppel- und 3 Rückkehrpunkte, dasselbe ist für $U = 0$ und $u = b$ der Fall. Im Punkte $U = 0$ und $u = c'$ liegen 2 Doppelpunkte. Für endliche Werthe von U, welche von Null verschieden sind, muss es noch einen Doppelpunkt geben, damit die Curve vom Geschlecht Eins sei. Für diesen Fall ist:

$$P(u) = (u-a)^4(u-b)^4\left[\frac{4^4}{5^5}A^5(u-a)(u-b) + C(u-c')^2\right].$$

Der Factor, welcher für $u = a$ und $u = b$ nicht verschwindet, muss ein Quadrat sein.

Wie in dem Werke von Briot und Bouquet gezeigt wird, lassen sich die Coefficienten nicht immer so bestimmen, dass die Bedingung für $P(u)$ erfüllt ist.

C. Eine Gleichung achter Ordnung,

welche die Bedingungen (3) und (4) erfüllt, ist folgende:

$$(1) \qquad U^4 + Ap(u)U^3 + Bp^2(u)U^2 + Cp^3(u)r(u) = 0,$$

$$p(u) = u^2 + 2\alpha_1 u + \alpha_2,$$

$$r(u) = u^2 + 2\beta_1 u + \beta_2.$$

Im Unendlichen liegen 12 Doppelpunkte, für jede der beiden Wurzeln von $p(u)=0$ und für $U=0$ gibet es 2 Rückkehr- und einen Doppelpunkt. Damit (1) vom Geschlecht Eins sei, muss es noch zwei singuläre Punkte geben. Für diese beiden Punkte gelten ausser (1) noch die Bedingungsgleichungen:

$$(2) \qquad 4U^2 + 3Ap(u)U + 2Bp^2(u) = 0;$$

$$(3) \qquad Ap'(u)U^3 + 2Bp'(u)p(u)U^2 + 3Cp'(u)p^2(u)r(u) + Cp^3(u)r'(u) = 0.$$

Wenn K_1 und K_2 die Wurzeln von

$$4K_\nu^2 + 3AK_\nu + 2B = 0$$

bedeuten, so kann (2) in folgender Weise geschrieben werden:

$$\{U - K_1p(u)\}\{U - K_2p(u)\} = 0.$$

Die Elimination von U aus den 3 Gleichungen (1), (2) und (3) ergiebt:

$$(K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2)p^4(u) + Cp^3(u)r(u) = 0 = P_\nu(u), \qquad (\nu=1,2)$$

$$(AK_\nu^3 + 2BK_\nu^2)p'(u)p^3(u) + C[3p'(u)r(u) + p(u)r'(u)]p^2(u) = 0 = Q_\nu(u),$$

$$\frac{d}{du}P_\nu(u) = Q_\nu(u) + (4K_\nu^4 + 3AK_\nu^3 + 2BK_\nu^2)p'(u)p^3(u).$$

In Folge der Definitionsgleichung für K_ν verschwindet der Factor von $p'(u)p^3(u)$ in der letzten Gleichung.

$$\frac{d}{du}P_\nu(u) = Q_\nu(u). \qquad (\nu=1,2)$$

Jeder Werth u eines Doppelpunktes, für welchen $U \neq 0$ ist, muss mindestens zweifache Wurzel von $P(u)$ sein.

Durch die Substitution

$$U = V + K_\nu p(u)$$

wird (1) in folgende Gleichung transformirt:

$$V^4 + (4K_\nu + A)p(u)V^3 + (6K_\nu^2 + 3AK_\nu + B)p^2(u)V^2 + P_\nu(u) = 0.$$

Für eine zweifache Wurzel von $P_\nu(u)$, welche nicht Wurzel von $p(u)$ ist, hat dann (1) einen Doppelpunkt. Der Factor von $P_\nu(u)$, welcher verschwinden kann, ohne dass dieses für $p(u)$ der Fall ist, heisst:

$$R_\nu(u) = (K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2)p(u) + Cr(u).$$

Er ist vom zweiten Grade und muss daher ein vollständiges Quadrat sein. Bezeichnet man

$$K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2$$

mit C_ν, so wird $R_\nu(u)$:

$$R_\nu(u) = (C + C_\nu)u^2 + 2(C\beta_1 + C_\nu\alpha_1)u + (C\beta_2 + C_\nu\alpha_2) = (M_\nu x + N_\nu)^2.$$

Die Bedingung ist daher:

$$(C\beta_1 + C_\nu\alpha_1)^2 = (C + C_\nu)(C\beta_2 + C_\nu\alpha_2).$$

Hiermit ist gefunden, dass die Differentialgleichung (1) dann ein eindeutiges Integral besitzt, wenn

(4) $$C_\nu = K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2 \qquad (\nu=1,2)$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

(5) $$(\alpha_1^2 - \alpha_2)C_\nu^2 - (\alpha_2 - 2\alpha_1\beta_1 + \beta_2)CC_\nu + (\beta_1^2 - \beta_2)C = 0.$$

Man kann in folgender Weise dieses Resultat direct nachweisen. Durch die Substitution $U = xp(u)$ wird (1)

$$(6)\qquad p(u)\{x^4 + Ax^3 + Bx^2\} + Cr(u) = 0 = f.$$

Durch Differentiation nach z erhält man:

$$\{p'(u)(x^4 + Ax^3 + Bx^2) + Cr'(u)\}\frac{du}{dz}$$
$$+ (4x^2 + 3Ax + 2B)p(u)x\frac{dx}{dz} = 0 = \frac{df}{dz},$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial u}xp(u) + Wxp(u)\frac{dx}{dz},$$

$$W = 4x^2 + 3Ax + 2B = 4(x - K_1)(x - K_2).$$

Setzt man ferner:

$$V = x^4 + Ax^3 + Bx^2,$$

so erhält man für u, x und $\frac{dx}{dz}$ folgende Gleichungen:

$$(V + C)u^2 + (2V\alpha_1 + 2C\beta_1)u + (V\alpha_2 + C\beta_2) = 0 = f.$$

$$(7)\qquad 2(V + C)u + (2V\alpha_1 + 2C\beta_1) + W\frac{dx}{dz} = 0.$$

Durch Elimination von u ergiebt sich folgende Differentialgleichung für x:

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2)V^2 - (\alpha_2 - 2\alpha_1\beta_1 + \beta_2)CV + (\beta_1^2 - \beta_2)C^2 = \frac{1}{4}W^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

Die linke Seite hat in Folge der Gleichung (5) die Wurzeln

$$V = C_\nu, \qquad (\nu = 1, 2);$$

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2)(V - C_1)(V - C_2) = 4(x - K_1)^2(x - K_2)^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

Die ganze rationale Function von x:

$$V - C_\nu = x^4 + Ax^3 + Bx^2 - C_\nu$$

hat die Wurzel $x = K_\nu$ wegen der Bedingung (4), und zwar ist dieses eine doppelte Wurzel, da

$$\frac{d(V - C_\nu)}{dx} = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx$$

auch für $x = K_\nu$ verschwindet. Es ist daher $V - C_\nu$ durch $(x - K_\nu)^2$ theilbar:

$$\frac{V - C_\nu}{(x - K_\nu)^2} = x^2 + (2K_\nu + A)x + (3K_\nu^2 + 2AK_\nu + B),$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{a_1^2 - a_2}{4} \cdot \frac{1}{K_1^2 K_2^2} [K_1^2 x^2 + (2K_1 + A) K_1^2 x - C_1] . [K_2^2 x^2 + (2K_2 + A) K_2^2 x - C_2],$$

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{R(x)}.$$

Hier bedeutet $R(x)$ eine ganze Function in x vom vierten Grade. Aus (7) erhält man schliesslich für u folgenden Werth:

$$u = -\frac{2a_1 x^4 + 2a_1 Ax^3 + 2a_1 Bx^2 + 2\beta_1 C + (4x^2 + 3Ax + 2B)\sqrt{R(x)}}{2x^4 + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2C}.$$

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI DÉFINIT LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

À STOCKHOLM.

Dans mon mémoire *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*[1] j'ai dit que les équations différentielles[2]

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', &\qquad \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'',\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', &\qquad \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, &\qquad \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma',
\end{aligned}
$$

auxquelles se ramène le problème considéré, n'admettent point en général de système d'intégrales uniformes, renfermant cinq constantes arbitraires et jouissant de la propriété de n'avoir que des pôles dans toute l'étendue du plan de la variable t.

---

[1] Acta mathematica, T. 12.

[2] Pour cause de brièvete j'écrirai toujours dans le présent mémoire x_0, y_0, z_0 au lieu de Mgx_0, Mgy_0, Mgz_0. x_0, y_0, z_0 désignent donc les coordonnées du centre de gravité du corps solide, multipliées par la masse de ce corps et par l'intensité de la force de gravité.

Si tel était le cas il faudrait en effet pouvoir intégrer les équations différentielles (1) par des séries de la forme

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
p &= t^{-1}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, p_n t^n, & \gamma &= t^{-2}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, f_n t^n,\\
q &= t^{-1}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, q_n t^n, & \gamma' &= t^{-2}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, g_n t^n,\\
r &= t^{-1}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, r_n t^n, & \gamma'' &= t^{-2}\sum_{0}^{\infty}{}_n\, h_n t^n,
\end{aligned}
$$

ces séries devant être uniformément convergentes dans un certain domaine et devant *contenir en outre cinq constantes arbitraires.* Mais, comme je l'ai fait voir dans mon mémoire cité, pour $n = 1, 2, \ldots$ les coefficients $p_n, q_n, r_n, f_n, g_n, h_n$ dans les séries (2) sont définis par le système d'équations linéaires suivantes

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&(n-1)Ap_n - A_1(q_0 r_n + r_0 q_n) + z_0 g_n - y_0 h_n = P_n,\\
&(n-1)Bq_n - B_1(r_0 p_n + p_0 r_n) + x_0 h_n - z_0 f_n = Q_n,\\
&(n-1)Cr_n - C_1(p_0 q_n + q_0 p_n) + y_0 f_n - x_0 g_n = R_n,\\
&\quad (n-2)f_n - r_0 g_n - g_0 r_n + q_0 h_n + h_0 q_n = F_n,\\
&\quad (n-2)g_n - p_0 h_n - h_0 p_n + r_0 f_n + f_0 r_n = G_n,\\
&\quad (n-2)h_n - q_0 f_n - f_0 q_n + p_0 g_n + g_0 p_n = H_n,
\end{aligned}
$$

où les $P_n \ldots H_n$ désignent des fonctions entières des coefficients $p_m \ldots h_m$ tels que $m < n$.

Pour $n = 0$ on a le système d'équations suivantes

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
-Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0, & -2f_0 &= r_0 g_0 - q_0 h_0,\\
-Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0, & -2g_0 &= p_0 h_0 - r_0 f_0,\\
-Cr_0 &= C_1 p_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0, & -2h_0 &= q_0 f_0 - p_0 g_0.
\end{aligned}
$$

J'ai montré dans mon mémoire cité que, sauf pour trois cas spéciaux, il n'y a qu'un nombre fini de systèmes de valeurs de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ qui satisfont aux équations (4).

[redacted]

Pour chacun de ces systèmes les valeurs de tous les coefficients $p_n \ldots h_n$ sont complètement déterminées par les équations linéaires (3), à moins que le déterminant de ces équations ne soit nul pour certaines valeurs entières positives de n. C'est donc ce déterminant que je vais maintenant calculer.

Je dois de nouveau, comme je l'ai fait dans mon mémoire cité, distinguer deux cas.

Premier cas. Les quantités réelles positives A, B, C sont telles qu'aucune des différences

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

n'est nulle. Dans ce cas j'ai montré dans mon mémoire que les équations (4) ne peuvent être satisfaites que par le système suivant de valeurs de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$.

Si l'on pose

$$a = \sqrt{\frac{2A+\lambda}{A_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2B+\lambda}{B_1}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2C+\lambda}{C_1}}$$

(en définissant le signe de chacune de ces racines d'une manière arbitraire) on doit avoir

$$p_0 = \quad bc,$$
$$q_0 = \quad ca,$$
$$r_0 = -ab.$$

En posant ensuite

$$\mu = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0,$$

on trouve

$$f_0 = -A_1q_0r_0\frac{\lambda}{\mu} = (2A+\lambda)p_0\frac{\lambda}{\mu},$$

$$g_0 = -B_1r_0p_0\frac{\lambda}{\mu} = (2B+\lambda)q_0\frac{\lambda}{\mu},$$

$$h_0 = -C_1p_0q_0\frac{\lambda}{\mu} = (2C+\lambda)r_0\frac{\lambda}{\mu},$$

la quantité λ désignant une racine quelconque de l'équation algébrique

$$Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0 = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0).$$

(Cette équation, mise sous une forme rationnelle, est du 8me degré par rapport à λ lorsque les constantes A, B, C, x_0, y_0, z_0 sont indépendantes les unes des autres.)

Pour plus de facilité dans les calculs j'écris 2λ au lieu de λ. On a alors, en posant

$$a^2 = \frac{A+\lambda}{A_1}, \qquad b^2 = \frac{B+\lambda}{B_1}, \qquad c^2 = \frac{C+\lambda}{C_1},$$

$$\mu = 2(Ax_0bc + By_0ca - Cz_0ab),$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} p_0 &= 2bc, & f_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu}A_1q_0r_0 = \frac{4\lambda(A+\lambda)}{\mu}p_0, \\ q_0 &= 2ca, & g_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu}B_1r_0q_0 = \frac{4\lambda(B+\lambda)}{\mu}q_0, \\ r_0 &= -2ab, & h_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu}C_1p_0q_0 = \frac{4\lambda(C+\lambda)}{\mu}r_0, \end{aligned}$$

λ étant une racine de l'équation algébrique

$$x_0(A+2\lambda)\sqrt{\frac{B+\lambda}{B_1}}\sqrt{\frac{C+\lambda}{C_1}} + y_0(B+2\lambda)\sqrt{\frac{C+\lambda}{C_1}}\sqrt{\frac{A+\lambda}{A_1}}$$
$$+ z_0(C+2\lambda)\sqrt{\frac{A+\lambda}{A_1}}\sqrt{\frac{B+\lambda}{B_1}} = 0.$$

Pour calculer le déterminant des équations (3) je vais tâcher de résoudre ces équations sous la supposition que $P_n = Q_n = R_n = F_n = G_n = H_n = 0$.

Je pose

$$(6) \qquad \begin{aligned} u_1 &= p_0p_n + q_0q_n + r_0r_n, \\ u_2 &= Ap_0p_n + Bq_0q_n + Cr_0r_n, \\ u_3 &= A^2p_0p_n + B^2q_0q_n + C^2r_0r_n, \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$p_0p_n = -\frac{BCu_1 - (B+C)u_2 + u_3}{B_1C_1},$$

$$q_0q_n = -\frac{CAu_1 - (C+A)u_2 + u_3}{C_1A_1},$$

$$r_0r_n = -\frac{ABu_1 - (A+B)u_2 + u_3}{A_1B_1}.$$

Je pose en plus

$$(7)\qquad \begin{aligned} v_1 &= g_0 r_n - h_0 q_n, \\ v_2 &= h_0 p_n - f_0 r_n, \\ v_3 &= f_0 q_n - g_0 p_n. \end{aligned}$$

Les trois premières des équations (3) se réduisent alors à

$$\begin{aligned} (n-2) f_n - r_0 g_n + q_0 h_n &= v_1, \\ r_0 f_n + (n-2) g_n - p_0 h_n &= v_2, \\ - q_0 f_n + p_0 g_n + (n-2) h_n &= v_3. \end{aligned}$$

Si je pose $n - 2 = m$, le déterminant de ce système d'équations est égal à

$$\begin{vmatrix} m & -r_0 & q_0 \\ r_0 & m & -p_0 \\ -q_0 & p_0 & m \end{vmatrix}$$

$$= m(m^2 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) = m(m^2 - 4) = n(n-2)(n-4).$$

En supposant donc que n n'est pas égal ni à 2, ni à 4, on trouve

$$\begin{aligned} n(n-2)(n-4) f_n &= (m^2 + p_0^2) v_1 + (p_0 q_0 + m r_0) v_2 + (p_0 r_0 - m q_0) v_3 \\ &= (n-4) \frac{2\lambda}{\mu} p_0 [(Am - 2\lambda) u_1 - (m+2) u_2]. \end{aligned}$$

En divisant par $(n-4)$ il vient donc

$$(8)\qquad \begin{aligned} n(n-2) f_n &= \frac{2\lambda}{\mu} p_0 (Amu_1 - 2\lambda u_1 - nu_2), \\ n(n-2) g_n &= \frac{2\lambda}{\mu} q_0 (Bmu_1 - 2\lambda u_1 - nu_2), \\ n(n-2) h_n &= \frac{2\lambda}{\mu} r_0 (Cmu_1 - 2\lambda u_1 - nu_2). \end{aligned}$$

Prenons maintenant les trois premières des équations (3)

$$(9)\qquad \begin{aligned} (n-1) A p_n - A_1 (q_0 r_n + r_0 q_n) &= y_0 h_n - z_0 g_n, \\ (n-1) B q_n - B_1 (r_0 p_n + p_0 r_n) &= z_0 f_n - x_0 h_n, \\ (n-1) C r_n - C_1 (p_0 q_n + q_0 p_n) &= x_0 g_n - y_0 f_n. \end{aligned}$$

En les multipliant respectivement par p_0, q_0, r_0 et en les additionant on trouve

(10) $$(n-1)u_2 + \Sigma A_1 q_0 r_0 p_n = \Sigma x_0 (r_0 g_n - q_0 h_n).$$

(Les signes Σ impliquent une sommation respectivement aux trois quantités symmétriques ABC, $A_1B_1C_1$, $p_0q_0r_0$ ou $x_0y_0z_0$). Mais

$$\Sigma A_1 q_0 r_0 p_n = -2\Sigma(A+\lambda)p_0 p_n = -2(u_2 + \lambda u_1),$$

$$n(n-2)(r_0 g_n - q_0 h_n) = \frac{2\lambda}{\mu} r_0 q_0 A_1 m u_1, \qquad m = n-2,$$

par conséquent, vu que $\Sigma x_0 A_1 q_0 r_0 = -\mu$,

$$n\Sigma x_0 (r_0 g_n - q_0 h_n) = -2\lambda u_1.$$

L'équation (10) se réduit donc à la suivante

$$n\{(n-1)u_2 - 2(u_2 + \lambda u_1)\} = -2\lambda u_1$$

ou

(11) $$n(n-3)u_2 - 2(n-1)\lambda u_1 = 0.$$

De même, en multipliant les deux côtés de chacune des équations (9) respectivement par Ap_0, Bq_0, Cr_0 et en les additionnant on trouve

(12) $$(n-1)u_3 + \Sigma A A_1 q_0 r_0 p_n = \Sigma x_0 (C r_0 g_n - B q_0 h_n).$$

Mais

$$\Sigma A A_1 q_0 r_0 p_n = -2\Sigma A(A+\lambda)p_0 p_n = -2(\lambda u_2 + u_3),$$

$$n(n-2)(C r_0 g_n - B q_0 h_n) = \frac{2\lambda}{\mu} A_1 r_0 q_0 (2\lambda u_1 + n u_2),$$

$$n(n-2)\Sigma x_0 (C r_0 g_n - B q_0 h_n) = -2\lambda(2\lambda u_1 + n u_2).$$

L'équation (12) se réduit donc à la suivante

$$n(n-2)\{(n-3)u_3 - 2\lambda u_2\} = -4\lambda^2 u_1 - 2\lambda n u_2$$

ou bien

(13) $$n(n-2)(n-3)u_3 - 2n(n-3)\lambda u_2 + 4\lambda^2 u_1 = 0.$$

En combinant les équations (12) et (13) on trouve

$$4\lambda^2 u_1 = n(n-3)u_3,$$
$$2\lambda u_2 = (n-1)u_3.$$

En portant ces valeurs de u_1 et de u_2 dans les équations (8) on trouve

$$f_n = \frac{p_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)A - 4\lambda\}u_3,$$
(14)
$$g_n = \frac{q_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)B - 4\lambda\}u_3,$$
$$h_n = \frac{r_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)C - 4\lambda\}u_3.$$

Posons maintenant

(15) $\quad k_0 = A + B + C, \qquad k_1 = BC + CA + AB, \qquad k_2 = ABC,$

multiplions chacune des équations (9) respectivement par BCp_0, CAq_0, ABr_0 et faisons-en la somme

(16) $\quad k_2(n-1)u_1 - \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0r_0p_n = \Sigma x_0(ABr_0g_n - ACq_0h_n).$

Mais on a

$$\Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0r_0p_n = 2\Sigma A(A+\lambda)(B+C-A)p_0p_n$$
$$= 2[-2k_2u_1 + (2k_1 + \lambda k_0)u_2 - (k_0 + 2\lambda)u_3],$$

par conséquent

$$k_2(n-1)u_1 - \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0r_0p_n$$
$$= (n+3)k_2u_1 - 2(2k_1 + \lambda k_0)u_2 + 2(k_0 + 2\lambda)u_3$$

ou bien, en portant dans cette équation les valeurs de u_1 et de u_2 exprimées en u_3, on a

$$k_2(n-1)u_1 - \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0r_0p_n$$
$$= \frac{u_3}{4\lambda^2}\{n^3k_2 - n(9k_2 + 8\lambda k_1 + 4\lambda^2k_0) + 4\lambda(2k_1 + 3\lambda k_0 + 4\lambda^2)\}.$$

D'un autre côté on trouve

$$ABr_0g_n - ACq_0h_n = \frac{r_0q_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)A(B+C)A_1 - 4\lambda AA_1\}$$

$$= -\frac{p_0}{\mu\lambda}(A+\lambda)\{(n-3)A(B+C) - 4\lambda A\}$$

$$= \frac{p_0}{\mu\lambda}\{(n-3)k_2 - [(n-3)(k_1+\lambda k_0) - 4\lambda^2]A + (n+1)\lambda A^2\}.$$

On a

$$\Sigma Ax_0p_0 = \mu, \qquad \Sigma x_0p_0 = -\frac{\mu}{2\lambda}.$$

Posons encore

$$\Sigma A^2x_0p_0 = \mu_1.$$

On a trouve alors

$$\Sigma x_0(ABr_0g_n - ACq_0h_n)$$

$$= \frac{u_s}{2\lambda^2}\left\{-(n-3)k_2 - 2(n-3)(k_1+\lambda k_0)\lambda + 8\lambda^3 + 2(n+1)\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\}$$

$$= \frac{u_s}{2\lambda^2}\left\{-n(k_2+2k_1\lambda+2k_0\lambda^2) + 3k_2 + 6k_1\lambda + 6k_0\lambda^2 + 8\lambda^3 + 2(n+1)\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (16) on trouve

$$(n-1)k_2u_1 - \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0r_0p_n - \Sigma x_0(ABr_0g_n - ACq_0h_n)$$

$$= \frac{u_s}{4\lambda^2}\left\{n^2k_2 - n(7k_2+4k_1\lambda) - 6k_2 - 4k_1\lambda - 4(n+1)\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\}$$

$$= \frac{u_s}{4\lambda^2}(n+1)\left\{n(n-1)k^2 - 6k_2 - 4k_1\lambda - 4\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\} = 0.$$

Par la manière même dont nous sommes arrivés à cette expression, il est clair que le facteur de u_s, multiplié par $n(n-2)(n-4)$, est le déterminant du système d'équations (3)

$$\Delta = (n+1)n(n-2)(n-4)\left(n(n-1)k_2 - 6k^2 - 4k_1\lambda - 4\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right).$$

L'équation $\Delta = 0$ n'ayant pour aucun système de valeurs des constantes A, B, C, x_0, y_0, z_0 *cinq* de ses racines égales à des nombres entiers positifs, il

en suit que, tant que les quantités A_1, B_1, C_1 sont toutes trois différentes de zéro les séries (2) ne peuvent jamais contenir le nombre nécessaire de constantes arbitraires pour représenter le système *général* des intégrales des équations différentielles (1). Les intégrales générales de ces équations ne peuvent donc pas être des fonctions uniformes du temps n'ayant que des pôles dans chaque domaine fini de la variable t.

Considérons maintenant le *second cas,* et supposons que l'on ait $A = B$.

Posons:

$$u = p + qi, \qquad \alpha = \gamma + \gamma' i, \qquad A_1 = A - C = -B_1, \qquad C_1 = 0.$$
$$v = p - qi, \qquad \beta = \gamma - \gamma' i,$$

Vu que l'on peut toujours dans ce cas choisir les axes des coordonnées de manière que $y_0 = 0$, les équations différentielles du problème peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$A\frac{du}{dt} + iA_1 ru = i(z_0\alpha - x_0\gamma''), \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -i(r\alpha - u\gamma''),$$
$$A\frac{dv}{dt} - iA_1 rv = -i(z_0\beta - x_0\gamma''), \qquad \frac{d\beta}{dt} = i(r\beta - v\gamma''),$$
$$C\frac{dr}{dt} = -\frac{x_0 i}{2}(\alpha - \beta), \qquad \frac{d\gamma''}{dt} = -\frac{i}{2}(u\beta - v\alpha).$$

Si l'on pose

$$u = t^{-1}\sum_0^\infty {}_n u_n t^n, \qquad \alpha = t^{-2}\sum_0^\infty {}_n \alpha_n t^n,$$
$$v = t^{-1}\sum_0^\infty {}_n v_n t^n, \qquad \beta = t^{-2}\sum_0^\infty {}_n \beta_n t^n,$$
$$r = t^{-1}\sum_0^\infty {}_n r_n t^n, \qquad \gamma'' = t^{-2}\sum_0^\infty {}_n h_n t^n,$$

on a

$$u_0 = p_0 + q_0 i, \qquad \alpha_0 = f_0 + g_0 i,$$
$$v_0 = p_0 - q_0 i, \qquad \beta_0 = f_0 - g_0 i.$$

Dans mon mémoire cité (page 182) j'ai montré que dans le cas où $A = B$ les équations auxquels doivent satisfaire les six quantités p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0 admettent deux systèmes de solutions.

Dans le premier de ces deux systèmes on a

$$p_0 = \varepsilon i \frac{z_0}{A - 2C} \frac{2C}{x_0}, \qquad f_0 = -\frac{2C}{x_0},$$

$$q_0 = \varepsilon i p_0, \qquad g_0 = \varepsilon i f_0, \qquad \varepsilon^2 = 1,$$

$$r_0 = 2\varepsilon i, \qquad h_0 = 0.$$

Supposons $\varepsilon = 1$, on a alors

$$u_0 = 0, \qquad \alpha_0 = 0,$$

$$v_0 = 2p_0 = 2i \frac{z_0}{A - 2C} \frac{2C}{x_0}, \qquad \beta_0 = -\frac{4C}{x_0},$$

$$r_0 = 2i, \qquad h_0 = 0.$$

Pour chaque valeur entière positive de n, les six quantités u_n, v_n, r_n α_n, β_n, h_n doivent satisfaire au système d'équations linéaires suivant

$$(n-1)Au_n + iA_1(r_0 u_n + u_0 r_n) - z_0 i\alpha_n + ix_0 h_n = U_n,$$

$$(n-1)Av_n - iA_1(r_0 v_n + v_0 r_n) + z_0 i\beta_n - ix_0 h_n = V_n,$$

$$(n-1)Cr_n \qquad + \frac{x_0 i}{2}(\alpha_n - \beta_n) = R_n,$$

$$(n-2)\alpha_n + r_0 i\alpha_n - iu_0 h_n + i\alpha_0 r_n - ih_0 u_n = \mathfrak{A}_n,$$

$$(n-2)\beta_n - r_0 i\beta_n + iv_0 h_n - i\beta_0 r_n + ih_0 v_n = \mathfrak{B}_n,$$

$$(n-2)h_n - \frac{i}{2} v_0 \alpha_n + \frac{i}{2} u_0 \beta_n - \frac{i}{2} \alpha_0 v_n + \frac{i}{2} \beta_0 u_n = H_n.$$

Les quantités $U_n \dots H_n$ désignent des fonctions entières des coefficients u_m, v_m, r_m, α_m, β_m, h_m pour lesquels $m < n$.

Si l'on porte dans ces équations les valeurs précédemment trouvées de u_0, v_0, r_0, α_0, β_0, h_0, elles se simplifient sensiblement et deviennent

$$[(n-3)A + 2C]u_n + ix_0 h_n = U_n,$$

$$[(n+1)A - 2C]v_n - iA_1 v_0 r_n + iz_0 \beta_n - ix_0 h_n = V_n,$$

$$(n-1)Cr_n - i\frac{x_0}{2}\beta_n = R_n,$$

$$(n-4)\alpha_n = \mathfrak{A}_n,$$

$$n\beta_n + iv_0 h_n - i\beta_0 r_n = \mathfrak{B}_n,$$

$$(n-2)h_n - \frac{i}{2}v_0\alpha_n + \frac{i}{2}\beta_0 u_n = H_n.$$

Le déterminant D de ces dernières équations peut sans difficulté être calculé directement. On a

$$D = (n-4)(nA + A - 2C)\begin{vmatrix} (n-3)A + 2C & 0 & 0 & ix_0 \\ 0 & (n-1)C & -\frac{ix_0}{2} & 0 \\ 0 & -i\beta_0 & n & v_0 i \\ \frac{i}{2}\beta_0 & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$= (n-4)(nA + A - 2C)D_1,$$

$$D_1 = [(n-3)A + 2C]\begin{vmatrix} (n-1)C & -i\frac{x_0}{2} & 0 \\ -i\beta_0 & n & v_0 i \\ 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{i}{2}\beta_0\begin{vmatrix} 0 & 0 & ix_0 \\ (n-1)C & -i\frac{x_0}{2} & 0 \\ -i\beta_0 & n & v_0 i \end{vmatrix}$$

$$= \left(n(n-1)C + \frac{x_0}{2}\beta_0\right)\left((n-2)[(n-3)A + 2C] + \frac{x_0}{2}\beta_0\right)$$

$$= (n+1)(n-2)(n-3)C(nA - 2A + 2C).$$

Par conséquent

$$D = (n+1)(n-2)(n-3)(n-4)C(nA + A - 2C)(nA - 2A + 2C).$$

Afin que cinq des racines de l'équation

$$D = 0$$

soient des nombres entiers positifs, il faudrait que les quantités

$$\frac{2C}{A} - 1 \quad \text{et} \quad 2 - \frac{2C}{A}$$

soient toutes les deux des nombres entiers positifs; mais ceci n'est evidemment pas possible.

Seulement dans le cas $2C = A$ l'une de ces quantités est égale à 0, l'autre à 1.

Dans ce cas-là on a, en faisant abstraction d'un facteur constant,

$$D = (n + 1)n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

Mais en regardant les formules précédentes ont voit que $v_0 = \infty$ si $A = 2C$, à moins que l'on n'ait en même temps $z_0 = 0$. Dans ce cas v_0 reste indéterminé. Ce cas, où $A = B = 2C$, $x_0 \neq 0$, $z_0 = 0$, est justement celui que j'ai étudié dans mon mémoire précité.

Le deuxième système de valeurs qui peuvent satisfaire aux équations qui definissent les six quantités $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ dans le cas de $A = B$, est le suivant (voir mon mémoire cité)

$$p_0 = 0, \qquad f_0 = -\frac{2A}{x_0 - iz_0},$$

$$q_0 = 2i, \qquad g_0 = 0,$$

$$r_0 = 0, \qquad h_0 = -if_0,$$

où, pour simplifier, j'ai écrit i seulement au lieu de εi ($\varepsilon^2 = 1$). En portant ces valeurs dans les équations (6), on voit qu'elles se divisent en deux groupes

$$A(n-1)p_n - 2A_1 i r_n + z_0 g_n = P_n,$$

$$C(n-1)r_n - x_0 g_n = R_n,$$

$$if_0 p_n + f_0 r_n + (n-2)g_n = G_n,$$

et

$$A(n-1)q_n - z_0 f_n + x_0 h_n = Q_n,$$

$$-f_0 q_n - 2if_n + (n-2)h_n = H_n,$$

$$-if_0 q_n + (n-2)f_n + 2ih_n = F_n,$$

dont le premier ne contient que les trois quantités p_n, r_n, g_n, tandis que le second ne contient que les quantités q_n, f_n, h_n. En calculant les déterminants de chacun de ces deux groupes d'équations à part, on trouve que le premier est donné par l'équation

$$D_1 = \frac{n-3}{x_0 - iz_0} A\{[(n^2 - n + 2)C - 2A]x_0 - in(n-1)Cz_0\},$$

tandis que le second a la valeur

$$D_2 = A(n+1)(n-2)(n-4).$$

Vu que toutes les constantes A, B, C, x_0, z_0 sont réelles, on voit facilement que l'équation en n

$$D = D_1 D_2 = 0$$

ne peut avoir cinq racines égales à des nombres entiers positifs que dans l'un des deux cas

$$A = C = B$$

ou bien

$$x_0 = 0, \qquad A = B.$$

Résumé: on voit donc que la condition nécessaire pour que les séries (2) puissent représenter les intégrales générales du système d'équations différentielles (1), n'est remplie que si les constantes A, B, C, x_0, y_0, z_0 satisfont à l'une des quatre conditions suivantes:

(1). $$A = B = C,$$

(2) $$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

(3) $$A = B, \qquad x_0 = y_0 = 0,$$

(4) $$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0.$$

MESURE DE LA COURBURE DES SURFACES SUIVANT L'IDÉE COMMUNE.[1]

SES RAPPORTS AVEC LES MESURES DE COURBURE GAUSSIENNE ET MOYENNE

PAR

F. CASORATI

à PAVIE.

Dans l'histoire des mathématiques la page qui se rapporte à l'idée et à la mesure de la courbure des surfaces est une de celles qui doivent, ce me semble, étonner plutôt que satisfaire les amis de cette science. Car on y apprend que, nonobstant la découverte des lois très simples qui régissent les courbures des lignes autour d'un point dans une surface et les nombreuses recherches qui s'y rattachent, l'idée de la courbure de la surface elle-même dans le point n'a jamais été suffisamment étudiée. En effet, l'on ne voit paraître aucune manière satisfaisante de mesurer une telle courbure jusqu'à la publication du célèbre Mémoire *Disquisitiones generales circa superficies curvas,*[2] et après cette publication on voit la plupart des géomètres se contenter des notions qui y sont données, comme si le dernier mot sur la courbure avait été prononcé.

---

[1] Les pages suivantes sont la traduction d'une Note parue dans les Rendiconti dell' Istituto Lombardo (année 1889), refondue et accompagnée de réflexions que l'auteur a désiré ajouter par suite de l'intérêt qu'ont pris à cette Note beaucoup de savants illustres, notamment MM. BELTRAMI, BOUSSINESQ, SCHIAPARELLI et SCHLÄFLI.

[2] Dans le vol. 6 des Comment. societatis regiae scientiarum Gottingensis recent. (Göttingen 1828), GAUSS' Werke, Vierter Band.

Laissant de côté l'idée des contacts et prenant en considération le rapport entre l'aire d'une *calotte infinitésimale,* c'est à dire, d'un fragment infiniment petit de la surface, entourant le point auquel on veut rapporter la mesure de la courbure, et l'aire d'une image de cette calotte, construite d'une certaine manière à l'aide des normales à la surface, Gauss ouvrit une voie qui conduit, comme on le verra dans cette Note, très facilement à la solution, peut-être la meilleure possible, de la question envisagée au point de vue ordinaire ou même vulgaire si l'on veut.

Mais, quant à la mesure de courbure qui a été fixée par le grand géomètre, bien qu'elle paraît avoir satisfait la plupart des mathématiciens jusqu'à présent, elle ne saurait satisfaire les hommes en général; car, dans des cas assez ordinaires, elle ne s'accorde pas avec l'idée que tout homme, ayant ou non des connaissances spéciales de mathématiques, conçoit d'une manière plus ou moins vague et pourrait exprimer par les mots *courbure d'une surface dans un point.* Malgré cela, la mesure Gaussienne a une grande importance, principalement par suite de sa propriété de rester invariable pour tout changement de forme qu'une surface peut subir sans que les longueurs de ses lignes en soient altérées. Il est superflu de rappeler que la manière d'envisager les surfaces expliquée dans l'article 13 des *Disquisitiones* a provoqué une série de nouvelles recherches très intéressantes et dont l'étendue va toujours en augmentant. En poursuivant les belles conséquences de l'invariabilité qu'il venait de découvrir, Gauss n'avait pas l'occasion de chercher une mesure de la courbure des surfaces envisagées de la manière ordinaire, c'est à dire comme limites des solides, ayant une forme unique et invariable. S'il s'était proposé ce dernier but, il aurait voulu l'atteindre en se conformant, je crois, à l'idée commune.

Le désaccord entre l'idée ordinaire de courbure et la mesure Gaussienne devient, pour ainsi dire, palpable dans le cas des surfaces développables sur le plan. Car, dans ce cas, l'image sphérique[1] de la calotte se réduit à *une seule* dimension, et par conséquent, le numérateur du rapport

$$\frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire de la calotte}}$$

[1] Que nous appellerons Gaussienne, suivant l'usage, bien qu'elle ait été étudiée avant Gauss.

étant nul, le rapport même et sa limite sont nuls aussi. Un géomètre peu soigneux pourrait donc dire, par exemple, que les surfaces cylindriques *n'ont pas de courbure,* tandis que tout le monde croit qu'elles sont *courbes,* comme on apprend à les considérer et à les nommer dès les premiers pas dans la vie et dans l'école. Parmi les innombrables lignes que l'on peut concevoir issues d'un point sur la surface d'un cylindre, *deux seules,* à savoir les deux parties de la génératrice, ne sont pas courbes. Nier, à cause de ces deux lignes seules, la courbure de l'ensemble de toutes les autres, cela doit paraître injuste à quiconque ne se met pas au point de vue de GAUSS.

Poussé par le désir d'établir une mesure de la courbure qui s'accordât dans tous les cas possibles avec l'idée générale, je remarquais tout d'abord que c'était à cause de l'*altération azimutale,* si une telle expression m'est permise, que l'image Gaussienne ne correspond pas, *quantitativement,* d'une manière satisfaisante à cette idée, et même en est une contradiction dans le cas des surfaces développables. Je vais m'expliquer d'une façon plus claire. Soit O le point de la surface, auquel la courbure se rapporte, et soient

$$OP_1\,,\ OP_2\,,\ \ldots\,,\ OP_n$$

n lignes ou rayons vecteurs tracés du point O jusqu'au contour de la calotte, *isogonalement,* à savoir, de manière que les angles

$$P_1OP_2\,,\ P_2OP_3\,,\ \ldots\,,\ P_nOP_1$$

soient égaux entre eux. Les lignes correspondantes

$$O'P'_1\,,\ O'P'_2\,,\ \ldots\,,\ O'P'_n$$

dans l'image Gaussienne ne résultent pas distribuées de même *isogonalement* autour de O'; et cette *altération azimutale* peut devenir très forte; tellement que, si la courbure de l'une des deux sections normales principales tend à s'évanouir, toutes les lignes

$$O'P'_1\,,\ O'P'_2\,,\ \ldots\,,\ O'P'_n$$

tendent à se diriger suivant une direction unique, qui est celle de l'image sphérique de l'autre section principale, en donnant par là naissance au cas d'une seule dimension pour l'image de la calotte.

Il m'a parù que, voulant faire servir le rapport

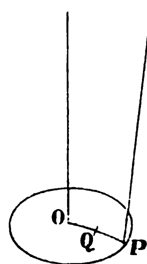
$$\frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire de la calotte}}$$

à la mesure de la courbure suivant l'idée commune, il était convenable de construire l'image de manière que, à la distribution isogonale des rayons vecteurs OP_1, OP_2, ..., dans la calotte, correspondît aussi une distribution isogonale dans l'image; en faisant, bien entendu, les rayons vecteurs de l'image plus ou moins longs relativement aux rayons, tous égaux entre eux, de la calotte, suivant que la calotte se courbe plus ou moins dans les directions respectives de ces rayons. Si dans la construction des rayons vecteurs de l'image on créait quelque autre inégalité, on donnerait, ce me semble, une prépondérance arbitraire à certaines directions parmi toutes celles qui émanent du point.

Voici donc de quelle manière je propose de mesurer la courbure d'une surface en un point, conformément à l'idée commune, dans les cas où il existe autour du point un fragment de la surface ayant partout un plan tangent.

I.

Soit toujours O le point de la surface auquel on rapporte la courbure. Supposons qu'un fil de longueur infiniment petite σ ait l'une de ses extrémités fixée au point O, et tourne en restant tendu sur la surface. Ce fil décrira un cercle géodésique qui sera notre calotte. Je prends l'aire de ce cercle comme dénominateur du rapport dont la limite, si elle existe, sera notre mesure de la courbure en O.



Pour numérateur je prends l'aire de l'image du cercle construite, non à la manière de Gauss, mais comme il suit. Sur chaque position OP du fil σ je prends OQ d'une longueur égale à la mesure de l'angle infiniment petit que la normale à la surface en P fait avec la normale en O.

L'aire de la figure formée par cette infinité de rayons géodésiques, issues du point O suivant tous les azimuts dans

la calotte, me paraît offrir une mesure assez naturelle et simple de l'ensemble des angles que les normales à la surface, élevées sur le contour du cercle, font avec la normale centrale. Il va sans dire que nous regardons chacun de ces angles comme la mesure la plus naturelle de l'incurvation de la surface le long du rayon OP qui y correspond.

II.

Nous allons maintenant traduire en formule analytique la définition qui vient d'être donnée.

En désignant par C notre mesure de courbure, et par α l'angle compris entre le rayon OP, regardé comme étant dans le plan tangent en O, et une direction fixée dans ce plan; nous pourrons écrire, d'après l'expression bien connue d'une aire en coordonnées polaires:

$$(1) \qquad C = \frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire du cercle}} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\overline{OQ}^2 . d\alpha}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\overline{OP}^2 . d\alpha},$$

où les rapports sont censés pris *à la limite.*

Le dénominateur de ce rapport peut s'exprimer par $\pi\sigma^2$, puisque la longueur de OP, à savoir σ, a été supposée constante par rapport à α.

Quant au numérateur, en admettant que les formules ordinaires de la théorie des surfaces s'appliquent à notre calotte, on trouve facilement pour lui aussi une expression bien simple et qui est très importante.

En effet, rapportons la surface à trois axes cartésiens orthogonaux. Soient x, y, z les coordonnées du point O, et $x + dx$, etc. celles du point P. Et, en adoptant une notation habituelle, posons:

$$dz = pdx + qdy, \qquad dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy.$$

Les cosinus des angles que les normales à la surface en O et en P font avec les axes s'expriment par

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\frac{p+dp}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}}, \quad \frac{q+dq}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}},$$

$$\frac{-1}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}}.$$

Mais, pour plus de simplicité, nous prendrons la normale en O pour l'axe des z, et la tangente en O à l'une des sections normales principales pour l'axe des x. D'après cela, nous avons:

$$x=y=z=0, \qquad p=q=0, \qquad s=0,$$

$$dp=rdx, \qquad dq=tdy.$$

Et, puisque r et t mesurent, comme on sait, les ***courbures*** (des sections normales) ***principales***, au point O, nous écrivons aussi

$$r=\frac{1}{R_1}, \qquad t=\frac{1}{R_2}.$$

De plus, en supposant que la direction initiale $\alpha=0$ soit celle de l'axe Ox, on pourra poser:

$$dx=OP\cos\alpha=\sigma\cos\alpha, \qquad dy=OP\sin\alpha=\sigma\sin\alpha,$$

$$dp=r\sigma\cos\alpha, \qquad dq=t\sigma\sin\alpha.$$

Maintenant l'angle des deux normales en O et en P n'est autre chose que l'angle de la normale en P avec l'axe des z, dont le cosinus s'exprime par:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{dp^2+dq^2+1}}$$

et le sinus par:

$$\sqrt{1-\cos^2}=\frac{\sqrt{dp^2+dq^2}}{\sqrt{dp^2+dq^2+1}}=\frac{\sigma\sqrt{r^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{1+\sigma^2(r^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha)}}.$$

Il s'ensuit qu'en négligeant les infiniment petits dont l'ordre est supérieur

à celui de σ, la mesure de l'angle infinitésimal que la normale en P fait avec la normale en O, c'est à dire, la longueur de OQ, sera exprimée par:

(2) $$OQ = \sigma\sqrt{r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \sigma\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}}.$$

Le numérateur du rapport (1) s'exprimera donc par la formule:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\overline{OQ}^2 d\alpha = \frac{\sigma^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}\right)d\alpha,$$

et le rapport même par:

(3) $$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}\right)d\alpha,$$

ou, en effectuant l'intégration, par:

(4) $$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Ce résultat, par lequel la courbure C se rattache d'une manière si simple aux grandeurs R_1, R_2 habituellement employées et jouant un rôle vraiment essentiel dans la théorie des surfaces, confirme, ce me semble, l'opportunité de la nouvelle définition.[1]

III.

Les mesures de courbure de surface dont l'usage s'est établi dans la science et qui y jouent à présent un rôle important, sont: la *mesure Gaussienne*, dont nous avons parlé, et que nous désignerons par G; et

---

[1] Pour abréger et suivant l'usage reçu, nous avons dit et nous dirons souvent *courbure* au lieu de *mesure de courbure*.

celle qui a été proposée par Sophie Germain[1] sous la dénomination de *courbure moyenne,* et que nous désignerons par M.

La présence de ces trois mesures G, M, C nous porte à faire quelques comparaisons et réflexions à leur égard.

Ces quantités s'exprimant en termes de

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$$

par les formules

$$(5) \qquad M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad G = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right),$$

on voit que nos mesures de courbure de surface sont les fonctions symétriques les plus simples possibles des mesures des courbures *linéaires* principales.

Chacune d'elles peut s'exprimer par les deux autres en vertu de l'équation:

$$(6) \qquad M^2 = \frac{G + C}{2},$$

tandis qu'il n'y a pas *d'équation* entre deux seules.

En valeur absolue, la courbure G est la *moyenne géométrique* pendant que C est la *moyenne arithmétique* des *carrés* des deux courbures principales.

L'égalité de ces carrés entraînant celle des moyennes, on a:

$$C = G = M^2 = \frac{1}{R^2}$$

dans les ombilics, et:

$$C = -G = \frac{1}{R^2}$$

partout où $M = 0$.

Pour les surfaces à courbure uniforme de la Géométrie élémentaire, c'est à dire, pour le plan, le cylindre circulaire et la sphère, la mesure C offre graduellement les valeurs:

$$0, \frac{1}{2R^2}, \frac{1}{R^2},$$

pendant que G retient la valeur zéro pour le cylindre.

[1] Dans le *Mémoire sur la courbure des surfaces,* publié dans le t. 7 du Journal de Crelle (Berlin, 1831).

IV.

On peut se demander: N'est-il pas trop d'introduire dans la Science plusieurs mesures pour la courbure d'une surface en un point? N'est-il pas possible d'en trouver une qui mérite la préférence et qui puisse, à elle seule, satisfaire à tout besoin?

La présence de deux mesures de courbure dans la théorie des lignes courbes peut bien à elle seule nous disposer à croire utile la pluralité des mesures pour la courbure des surfaces. Mais dans la nature même des surfaces on trouve facilement des raisons plus concluantes.

La voussure, pour ainsi dire, d'une surface en un point ou, ce qui revient au même, l'ensemble des courbures des lignes que l'on peut concevoir tracées sur la surface et émanant de ce point, dépend (dans les suppositions ordinaires de la théorie des surfaces) à un degré égal de deux éléments indépendants entre eux, que nous pouvons supposer être les courbures linéaires principales

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}.$$

Par conséquent, si l'on veut établir un système de quantités nécessaires et suffisantes pour individualiser et représenter complètement dans nos recherches cette voussure ou forme de la surface en un point, quantités que l'on peut nommer *mesures de la courbure* de la surface, il faut prendre, non pas une seule, mais deux fonctions de ces éléments indépendants. Dans ce but il paraît assez naturel de choisir deux fonctions simples et symétriques des dites courbures linéaires; soit deux d'entre les fonctions

$$G, M, C.$$

La raison qui vient d'être exposée en faveur de la pluralité des courbures de surface, pourrait cependant provoquer une dispute que nous voudrions pouvoir écarter. Deux quantités paraissant suffire pour représenter le rôle que peut jouer la forme d'une surface en un point dans les questions de la Géométrie et de la Philosophie naturelle, on pourrait être tenté de ne prendre en considération que deux d'entre les fonctions

G, M, C; en décorant ces deux seules du nom de *mesure de courbure* et en ensevelissant l'autre dans l'oubli. Or, refuser de prendre en considération une quantité qui se présente aussi naturellement dans la science que chacune des trois G, M, C, ce serait, à notre avis, un acte arbitraire, qui n'aurait d'autres suites que de nous dérober les conclusions intéressantes auxquelles la considération de la quantité pourrait mener. Quant à la pure question des noms, nous ferons remarquer qu'elle n'a rien d'essentiel.

Dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* M. Darboux dit à propos de G et M:[1] »On a écrit des Mémoires pour chercher laquelle de ces deux quantités doit servir de mesure à la courbure de la surface en un point donné. Les géomètres qui ont traité ce sujet ne se sont pas aperçus qu'ils renouvelaient, sous d'autres espèces, la célèbre question des forces vives, ...»

Et nous, nous dirons: de même que le débat entre les Cartésiens et Leibniz n'exprimait, au fond, que le besoin qu'on éprouvait d'avoir deux noms pour distinguer l'une de l'autre et affirmer l'importance des deux quantités pour chacune desquelles les antagonistes réclamaient la dénomination de *force vive,* de même nous croyons qu'il n'y a, à présent, d'autre chose à faire, par rapport à G, M, C, que de les distinguer par des dénominations commodes, et de s'en servir à l'occasion, sans se donner la peine de supprimer ou dégrader l'une ou l'autre.

Il va sans dire que, pour simplifier les formules, il sera toujours permis de faire disparaître celle que l'on voudra des trois fonctions, à l'aide de la relation $2M^2 = G + C$. Mais en Géométrie, comme en Mécanique et Physique mathématique, il faut laisser chacune d'elles jouer le rôle qui lui est propre, et qui doit peu à peu se faire valoir avec nos progrès dans ces sciences. Si à l'égard de G et M on connaît déjà nombre de résultats très intéressants, il serait arbitraire de nier d'avance que la considération de C ne puisse mener à des résultats pareillement importants.[2]

---

[1] Deuxième partie, pag. 365.

[2] Nous verrons ailleurs que beaucoup d'autres quantités, outre ces trois principales, se présentent assez spontanément à l'esprit de celui qui réfléchit sur l'idée de courbure d'une surface, avec des titres pour servir de mesures ou de fonctions caractérisant la forme de la surface en un point.

Jusqu'à ce qu'une raison plausible ou l'usage général me fasse changer d'avis, je continuerai d'appeler, dans mes leçons, *M courbure moyenne*,[1] et

[1] Si cette dénomination n'était déjà établie par l'usage, j'eus nommé cette courbure *Germainienne;* parceque la plupart des autres quantités, auxquelles nous venons de faire allusion (notre C y comprise, comme moyenne arithmétique des courbures principales carrés et comme moyenne exprimée par la formule (3) dont nous parlerons ailleurs) auraient aussi plus ou moins droit à cette dénomination de *courbure moyenne.*

Parmi ces quantités on peut classer, par exemple, outre le premier terme, qui est M, tous les autres de la série $M_1, M_2, M_3, \ldots$, définis par:

$$M_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^\nu}\,da,$$

où $\frac{1}{\rho}$ désigne la courbure de la section normale faisant l'angle a avec la section principale $a = 0$. Comme on a:

$$\frac{1}{\rho^\nu} = \left(\frac{\cos^2 a}{R_1} + \frac{\sin^2 a}{R_2}\right)^\nu,$$

on obtient promptement M_ν à l'aide des formules connues:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n} a\,da = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2n} a\,da = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ \ldots\ 2n}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2m} a . \cos^{2n} a\,da = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)\,1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots(2m+2n)}.$$

Mais je n'ajouterai ici qu'une remarque concernant M_2. On peut écrire:

$$M_2 = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2 da}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sigma^2 da},$$

d'où l'on voit que M_2 peut être envisagée comme limite du rapport:

$$\frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire du cercle}},$$

pourvu que l'on construise cette image comme dans le cas de C, mais en prenant OQ égal à l'angle que Oz fait, non pas avec la normale en P à la *surface,* mais avec la normale en P à la *section* faite dans la surface par le plan OzP.

G courbure Gaussienne, et *C* simplement *courbure,* lorsque cela n'engendre de confusion.

Cette espèce de prééminence que je donne par là à *C*, comme mesure de courbure, me paraît justifiée par plusieurs motifs dont les suivants se présentent immédiatement à l'esprit.

C est, comme nous avons déjà dit, une traduction de l'idée commune de courbure d'une surface plus fidèle que *M* et *G*.

C caractérise par sa valeur zéro le manque total de courbure, de même que la *première* des deux courbures des lignes, que l'on a déjà l'habitude de nommer tout simplement *courbure.*

Avec cette signification du mot *courbure* on peut dire:

Si la courbure est nulle en tout point, la surface est plane (la ligne est droite).

Il n'y a que la surface plane (resp. la ligne droite) dont la courbure soit nulle en tout point.

V.

Dans l'expression (1) de *C*, c'est à dire, dans le rapport:

$$\frac{\int \frac{1}{2}\,\overline{OP}^2(r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha)d\alpha}{\int \frac{1}{2}\,\overline{OP}^2 d\alpha},$$

la longueur infiniment petite de *OP* a été supposée indépendante de α. Si l'on fait *OP* fonction de α, la limite du rapport dépend, en général, de cette fonction. Si la fonction ne dépend nullement de r et t, la limite s'exprimera toujours en r et t par la formule:

$$\frac{cr^2 + c't^2}{c + c'},$$

dont on obtiendrait pour les coefficients les expressions:

$$c = \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)^2 \cos^2\alpha d\alpha, \qquad c' = \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)^2 \sin^2\alpha d\alpha,$$

en faisant $OP = \sigma\varphi(\alpha)$, σ ayant la signification précédente et n'entrant pas en φ.

Mais contentons-nous, en ce moment, d'avoir constaté que ces coefficients dépendent de la forme du contour de la calotte évanouissante; dont dépend par suite le plus ou moins de prépondérance de r ou de t dans la valeur limite du rapport.

La limite du rapport Gaussien, au contraire, ne dépend nullement, comme on le sait, de la forme du dit contour; pourvu qu'il se réduise, non pas à une ligne, mais au seul point considéré. On peut supposer que la calotte, au lieu d'entourer le point, soit, par exemple, un triangle ayant dans le point un sommet infiniment aigu. Or, je pose la question: Est-ce qu'un mode de représentation jouissant de cette propriété est propre à fournir, en la valeur limite du rapport entre l'aire de l'image et celle de la figure originale sur la surface, une mesure de la courbure correspondante à l'idée commune? Mais j'en renvois la réponse à une autre occasion, et je termine maintenant ce paragraphe par une courte analyse ayant pour but de démontrer, à l'aide de nos formules polaires, la propriété infinitésimale, qui est la substance de l'article 7 des *Disquitiones,* et dont découle la dite propriété du rapport Gaussien.

Soit O' l'image Gaussienne de O sur la sphère de rayon 1 et de centre arbitraire, $O'P'$ l'image de OP, et $O'x'$ la parallèle à Ox. Lorsque OP, en tournant autour de O, fait avec Ox l'angle α, l'image $O'P'$ formera avec $O'x'$ un autre angle que je désignerai par β. Par suite, le rapport Gaussien sera:

$$\frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\overline{O'P'}^2 d\beta}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha}.$$

Mais $O'P'$ mesure, comme OQ dans le rapport C, l'angle que la normale en P fait avec la normale en O; on a donc:

$$O'P' = OQ = OP\sqrt{r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha};$$

et le rapport Gaussien pourra s'exprimer comme suit:

$$\frac{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\overline{OP}^2(r^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha)d\beta}{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha}.$$

Pour calculer cette formule par des intégrations par rapport à α, il semblerait nécessaire d'avoir tant OP que $d\beta$ en termes de α. Mais il suffit d'avoir $d\beta$. En effet, on trouve: [1]

$$d\beta = \frac{rt\,.\,d\alpha}{r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha},$$

d'où l'équation:

$$\frac{1}{2}\overline{O'P'}^2 d\beta = rt\,.\,\frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha,$$

qui exprime la propriété infinitésimale. Elle nous montre que, par le changement de l'azimut α dans l'azimut β qu'implique la construction de Gauss, on détruit en quelque sorte l'influence des différences d'incurvation de la surface autour de O sur la valeur du rapport des aires. En effet, dans cette construction, à tout élément $\frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha$ de la surface on fait correspondre dans l'image un élément $\frac{1}{2}\overline{O'P'}^2 d\beta$ dont le rapport au premier est toujours le même, c'est-à-dire, est la quantité rt indépendante de l'azimut α, tandis que dans notre construction chaque élément $\frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha$ de la surface est représenté dans l'image par un élément $\frac{1}{2}\overline{OQ}^2 d\alpha$ ayant avec lui un rapport proportionnel au carré de la déviation que la normale subit le long de OP.

[1] La relation finie entre α et β est: $\tang\beta = \frac{t}{r}\tang\alpha$.

VI.

Je ne crois pas inutile, en terminant cette Note, de recommander aux jeunes mathématiciens les recherches que suscite tout naturellement la considération de la nouvelle mesure C, et d'exhorter les auteurs de *traités*, particulièrement d'Analyse et de Géométrie infinitésimale, à lui accorder une place dans leurs livres. Nombre de ces traités, tout en exposant, avec quelque extension, les propriétés qui se rapportent aux courbures des lignes issues d'un point sur une surface, ne contiennent pas même la phrase *courbure propre de la surface,* en laissant presque croire aux lecteurs novices qu'une telle courbure ne peut pas être l'objet de la spéculation mathématique.

Parmi les ouvrages qui n'ont pas ce défaut, je tiens à rappeler ici le *Traité de calcul différentiel* de M. Bertrand, pour avoir l'occasion de commenter brièvement deux des paragraphes que l'illustre auteur consacre à la courbure des surfaces. Au § 720 il écrit: »L'idée de courbure appliquée aux surfaces est extrêmement complexe; on peut en effet concevoir en chaque point une infinité de courbes tracées sur la surface, et la courbure de chacune d'elles est un des éléments qui figurent dans l'idée vague que nous exprimons par le mot *courbure* appliqué à la surface.» Or, l'aire que nous avons pris comme numérateur du rapport C, n'étant qu'une mesure de l'ensemble, pour ainsi dire, des angles que les normales tout autour du point font avec la normale en ce point, semblerait pouvoir satisfaire l'éminent géomètre, et peut-être lui faire agréer aussi les réflexions que nous venons de faire dans le § IV.

Après avoir exposé les notions Gaussiennes de courbure totale et de courbure en un point, M. Bertrand fait remarquer, au § 721, »l'analogie complète des définitions précédentes avec celles qui se rapportent aux courbes planes». J'avoue que cette analogie ne me paraît pas aussi complète qu'à M. Bertrand. Cette analogie suppose que l'on doit substituer la sphère au cercle lorsqu'on passe des lignes planes aux surfaces. Mais une ligne et un cercle n'ont qu'*une* direction d'incurvation, tandis

qu'une surface et une sphère, en ayant une infinité, nous présentent cette discordance, bien connue, mais dont ici je tiens à dire que l'analogue ne se trouve pas dans les lignes, à savoir que la sphère se courbe *également*, mais la surface *inégalement* dans les différentes directions.[1]

---

[1] M. DARBOUX aussi paraît n'accorder aucune importance à cette discordance. Voir a page citée de ses *Leçons*.

BESTIMMUNG EINER KLASSE VON BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONSGRUPPEN DES DREIFACH AUSGEDEHNTEN RAUMES

VON

GEORG SCHEFFERS
in LEIPZIG.

In der LIE'schen Theorie der *continuierlichen Transformationsgruppen* spielen die sogenannten *Berührungstransformationen* eine äusserst wichtige Rolle, namentlich auch wegen ihrer fundamentalen Bedeutung für die Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen. Für ihre Anwendung ist es von ganz besonderem Vorteil, alle *Gruppen* von Berührungstransformationen auf typische Formen zurückgeführt zu haben. Bisher ist dieses Problem für die zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zum Abschlusse gebracht worden, indem SOPHUS LIE zeigte, dass alle endlichen continuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene, welche sich nicht auf blosse Punkttransformationsgruppen reducieren lassen, durch drei gewisse typische Formen dargestellt werden. Es steht zu erwarten, dass es im Raume von drei Dimensionen weit mehr Typen solcher Gruppen geben wird, und daher ist es zweckmässig, das betreffende Problem für den Raum nur schrittweise, in mehreren Einzelproblemen, in Angriff zu nehmen.

Herr Professor LIE veranlasste mich, zunächst eines dieser Einzelprobleme zu behandeln. Die vorliegende Arbeit giebt die Lösung desselben. Es ist meine Pflicht, an dieser Stelle hervorzuheben, dass ich Herrn Prof. LIE zum grössten Danke verpflichtet bin für die mannigfache

Unterstützung, die er meinen Untersuchungen gewährte. Meine Arbeit verdankt ihm ausser der Anleitung mehrere wertvolle Gesichtspunkte, durch die erst die Möglichkeit zu ihrer Durchführung gegeben wurde.

Diese im wesentlichen von LIE herrührenden Betrachtungen haben in der Einleitung ihren Platz gefunden. Eine andere LIE'sche Betrachtung ist an einer späteren Stelle wiedergegeben worden. Des besseren Verständnisses halber sehe ich mich veranlasst, in der Einleitung auch die fundamentalen Formeln für Berührungstransformationen des Raumes kurz zusammenzustellen.[1] Was endlich die allgemeinen Begriffe und Sätze über Transformationsgruppen überhaupt anlangt, welche im folgenden fortwährend verwendet werden, so muss ich zu ihrer Begründung auf den kürzlich erschienenen I. Abschnitt des LIE'schen Lehrbuches[2] verweisen.

Einleitung.

A. Bezeichnen x_1, x_2, x_3 Cartesische Punktcoordinaten in einem dreifach ausgedehnten Raume — dem R_3 —, so wird eine durch den Punkt (x_1, x_2, x_3) gehende Ebene, deren laufende Punktcoordinaten etwa X_1, X_2, X_3 sind, analytisch dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$\sum_1^3{}_k p_k(X_k - x_k) = 0.$$

Mithin lassen sich x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3 als Coordinaten des durch diese Ebene im Punkte (x_1, x_2, x_3) bestimmten *Flächenelementes* auffassen. Dabei ist zu beachten, dass p_1, p_2, p_3 *homogene* Bestimmungsstücke vorstellen.

---

[1] Professor LIE's wichtigste Untersuchungen über Berührungstransformationen und Gruppen von Berührungstransformationen sind in den folgenden Arbeiten auseinandergesetzt: Analytische Theorie der Berührungstransformationen, Gesellsch. d. Wissensch. zu Christiania 1873; Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen, Math. Ann. Bd. 8, 1874; Göttinger Nachrichten Decbr. 1874; Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1878 u. 1879.

[2] SOPHUS LIE, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt, unter Mitwirkung von Dr. F. ENGEL bearbeitet. Leipzig, Teubner 1888.

Die Bedingung dafür, dass das Flächenelement (x_k, p_k) mit dem ihm unendlich benachbarten Elemente $(x_k + dx_k, p_k + dp_k)$ *vereinigt* liege, d. h. der Punkt des einen Elementes auf dem anderen gelegen sei, drückt sich durch die Gleichung aus:

$$\sum_1^3{}_k p_k dx_k = 0. \tag{1}$$

Eine Transformation der Flächenelemente, welche vereinigt liegende Elemente in ebensolche überführt, d. h. eine sogenannte *Berührungstransformation* des R_3, muss also die Gleichung (1) invariant lassen.

Es sei

$$Bf \equiv \sum_1^3{}_k \xi_k(x, p)\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^3{}_k \pi_k(x, p)\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

eine *infinitesimale* Berührungstransformation des R_3. Vermöge derselben muss die linke Seite der Gleichung (1) ein Increment erhalten, das ein blosses Vielfaches dieser linken Seite ist, d. h. es muss sein

$$B\left(\sum_1^3{}_k p_k dx_k\right) \equiv \rho \,.\, \sum_1^3{}_k p_k dx_k,$$

wo ρ eine Function der x, p bedeutet, die aber $\equiv 0$ angenommen werden darf; d. h.

$$\sum_1^3{}_k p_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \pi_i \equiv 0, \qquad \sum_1^3{}_k p_k \frac{\partial \xi_k}{d p_i} \equiv 0. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \tag{2}$$

Wenn umgekehrt die ξ_k und π_k diese 6 Relationen identisch erfüllen, so ist auch Bf eine infinitesimale Berührungstransformation des R_3.

Die Gleichungen (2) erfüllt man in allgemeinster Weise dadurch, dass man

$$\xi_k \equiv \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \pi_k \equiv -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3)} \tag{3}$$

setzt, wo H eine hinsichtlich p_1, p_2, p_3 von der *ersten* Ordnung *homogene*, sonst aber beliebige Function der x, p bedeutet.[1] Die allgemeine Form einer infinitesimalen Berührungstransformation in den Variabeln x, p ist daher:

$$Bf \equiv \sum_1^3{}_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \equiv (Hf), \tag{4}$$

[1] Vgl. LIE, *Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungstransformationen.* Math. Annalen, Bd. 8, p. 239, 240.

wenn nämlich unter (uv) allgemein der Ausdruck

(5) $$(uv) \equiv \sum_{1}^{3}{}_k \left(\frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} \right)$$

verstanden wird.[1]

H ist die sogenannte *characteristische Function* der Berührungstransformation Bf.

Man kann nun durch blosse Ausrechnung folgenden Satz verificieren:

(6) Besitzen die infinitesimalen Berührungstransformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ in den Variabeln x, p die characteristischen Functionen H_1 resp. H_2, so besitzt die durch Klammeroperation entstehende infinitesimale Berührungstransformation

$$(B_1 B_2) \equiv B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f)$$

die characteristische Function

$$(H_1 H_2) \equiv \sum_{1}^{3}{}_k \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_k} \frac{\partial H_2}{\partial x_k} - \frac{\partial H_1}{\partial x_k} \frac{\partial H_2}{\partial p_k} \right).$$

Statt der drei homogenen Variabeln p_1, p_2, p_3 können wir auch *nicht-homogene*, — y_1, y_2 —, anwenden, indem wir etwa setzen

$$y_1 = -\frac{p_1}{p_3}, \qquad y_2 = -\frac{p_2}{p_3}.$$

Dabei empfiehlt es sich, die hierdurch entstehende Unsymmetrie auch in den Variabeln x_1, x_2, x_3 zum Ausdruck zu bringen; wir schreiben z statt x_3.

Wir geben kurz die den obigen entsprechenden Formeln in den Coordinaten x_1, x_2, z, y_1, y_2 an, da wir sie im folgenden gebrauchen werden:

Anstelle der Bedingung (1) für die vereinigte Lage zweier Flächenelemente tritt die Bedingung

(1′) $$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = 0.$$

---

[1] Nicht zu verwechseln mit der Operation (AB) zwischen 2 infinitesimalen Transformationen Af und Bf.

Die infinitesimale Transformation

$$Bf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

stellt eine Berührungstransformation in den Variabeln x_1, x_2, z, y_1, y_2 dann und nur dann dar, wenn

$$(3') \quad \begin{cases} \xi_k \equiv \dfrac{\partial W}{\partial y_k}, \qquad \eta_k \equiv -\dfrac{\partial W}{\partial x_k} - y_k \dfrac{\partial W}{\partial z}, \\ \zeta \equiv -W + y_1 \dfrac{\partial W}{\partial y_1} + y_2 \dfrac{\partial W}{\partial y_2} \end{cases} \quad (k=1,2)$$

ist, wo W irgend eine Function von x_1, x_2, z, y_1, y_2 bezeichnet. W möge die *characteristische Function* der Berührungstransformation Bf in den Veränderlichen x_1, x_2, z, y_1, y_2 heissen. Nach (3′) ist

$$(4') \qquad Bf \equiv \{Wf\} - f \frac{\partial W}{\partial z},$$

wenn allgemein

$$(5') \qquad \{uv\} \equiv \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial y_2} + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)$$
$$+ y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) - u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}$$

gesetzt wird. Anstelle des Satzes (6) endlich tritt hier der folgende Satz:

(6′) Besitzen die infinitesimalen Berührungstransformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ des R_3, geschrieben in den Variabeln x_1, x_2, z, y_1, y_2, die characteristischen Functionen W_1 resp. W_2, so besitzt die durch Klammeroperation entstehende infinitesimale Berührungstransformation

$$(B_1 B_2) \equiv B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f)$$

die characteristische Function $\{W_1 W_2\}$.

Noch sei Eines hervorgehoben: Besitzt eine infinitesimale Berührungstransformation in den Variabeln x, p die characteristische Function H und ist W die characteristische Function der durch Einführung der Ver-

änderlichen x_1, x_2, z, y_1, y_2 aus ihr hervorgehenden Berührungstransformation, so besteht die leicht zu verificierende Relation

$$(7) \qquad H = -p_3 W.$$

Wir werden späterhin uns fast ausschliesslich auf die Benutzung der Veränderlichen x_1, x_2, z, y_1, y_2, die wir kurz als die *nichthomogenen* bezeichnen, beschränken. Auch werden wir sowohl beim Gebrauch der homogenen wie bei dem der nicht-homogenen Coordinaten gelegentlich eine infinitesimale Berührungstransformation mit der characteristischen Function u einfach als die Transformation (u) bezeichnen.

B. Der Raum enthält ∞^5 Flächenelemente. Eine continuierliche Schar von ∞^2 Flächenelementen des R_3, von denen ein jedes mit allen infinitesimal benachbarten der Schar vereinigt liegt, heisst bekanntlich ein *Verein von Flächenelementen.*

Eine *Gruppe* von Berührungstransformationen des R_3 ist nun dann und nur dann *reducibel,* d. h. vermöge einer Berührungstransformation in eine Gruppe von blossen Punkttransformationen überführbar, wenn sich die ∞^5 Flächenelemente des R_3 in ∞^3 Vereine anordnen lassen, deren Inbegriff bei der Gruppe invariant bleibt, während die einzelnen Vereine unter einander vertauscht werden können. Ist nämlich diese Anordnung möglich, so kann man durch eine Berührungstransformation die ∞^3 Vereine in diejenigen ∞^3 Vereine des R_3 überführen, deren jeder aus allen Flächenelementen besteht, die einen und denselben Punkt gemein haben.

Denn eine Zerlegung der Gesamtheit der ∞^5 Flächenelemente des R_3 in ∞^3 Vereine wird — in den homogenen Coordinaten x, p — durch drei Gleichungen

$$(8) \qquad X_i(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = c_i \qquad (i=1,2,3)$$

vermittelt, in denen X_1, X_2, X_3 von einander unabhängige nur die Verhältnisse der p enthaltende Functionen der x, p und die c_i willkürliche Constanten bedeuten; derart, dass diese Gleichungen, wenn in ihnen für c_1, c_2, c_3 bestimmte Zahlenwerte gesetzt werden, jedesmal die ∞^2 Flächenelemente eines der ∞^3 Vereine darstellen. Dies thun sie aber dann und nur dann, wenn sie die Bedingung (1) der vereinigten Lage nach sich ziehen, d. h. (da dies für alle Wertetripel c_1, c_2, c_3 gelten soll) wenn es

noch drei Functionen P_1, P_2, P_3 der x, p giebt von der Beschaffenheit, dass

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3 \equiv P_1 dX_1 + P_2 dX_2 + P_3 dX_3 \tag{9}$$

wird. Die Gleichungen

$$x'_k = X_k, \qquad p'_k = P_k \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3)} \tag{10}$$

bestimmen hiernach eine Berührungstransformation der x, p in die x', p'. Denn dass sie umgekehrt nach den x, p auflösbar sind, lässt sich allgemein beweisen, ebenso wie man zeigen kann, dass die Forderung (9) bei noch unbekannten P_1, P_2, P_3 immer in allgemeinster Weise durch drei beliebige von einander unabhängige Functionen X_1, X_2, X_3 von $x_1, x_2, x_3, \frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}$ erfüllt werden, für welche nur jedes $(X_i X_k) \equiv 0$ sein muss; die P bestimmen sich dann nachträglich aus den X.[1]

Die Berührungstransformation (10) führt nun jeden der durch (8) bestimmten ∞^3 Vereine (c_1, c_2, c_3) in einen Verein über, dessen Elemente sämtlich einen Punkt $(x'_1 = c_1, x'_2 = c_2, x'_3 = c_3)$ gemein haben. Wenn also eine Gruppe von Berührungstransformationen die Schar (8) von ∞^3 Vereinen invariant lassen soll, so muss nach Einführung der neuen Variabeln x', p' bei der Gruppe die Schar der ∞^3 Punkte des R_3 unter sich transformiert werden, d. h. die Gruppe wird zu einer Gruppe von blossen Punkttransformationen.

Da sich diese Betrachtung mit Leichtigkeit auch umkehren lässt, so ergiebt sich folgendes

Criterium der Irreducibilität:

Eine Gruppe von Berührungstransformationen des R_3 in den homogenen Variabeln x, p ist dann und nur dann irreducibel, wenn es keine drei von einander unabhängige Functionen X_1, X_2, X_3 von $x_1, x_2, x_3, \frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}$ giebt von der Art, dass jedes

$$(X_i X_k) \equiv 0$$

[1] Dass die Functionen X_k, P_k, welche die Gleichung (9) erfüllen, von einander unabhängig sind, ist aus der Theorie des PFAFF'schen Problems bekannt; eine einfache direkte Begründung dieses Satzes findet sich bei A. MAYER, *Direkte Begründung der Theorie der Berührungstransformationen.* Math. Annalen, Bd. 8, p. 304 ff.

ist und überdies das Gleichungensystem

$$X_1 = \text{Const.}, \qquad X_2 = \text{Const.}, \qquad X_3 = \text{Const.}$$

bei den Transformationen der Gruppe invariant bleibt, d. h. die X durch Ausführung der Transformationen der Gruppe immer wieder in Functionen der X allein übergehen.

In nicht-homogenen Variabeln lautet der Satz so:

Eine Gruppe von Berührungstransformationen des R_3 in x_1, x_2, z, y_1, y_2 ist dann und nur dann irreducibel, wenn es keine drei von einander unabhängige Functionen X_1, X_2, Z von x_1, x_2, z, y_1, y_2 giebt von der Art, dass

$$[X_1 X_2] \equiv 0, \qquad [X_1 Z] \equiv 0, \qquad [X_2 Z] \equiv 0$$

ist und überdies X_1, X_2, Z durch Ausführung der Transformationen der Gruppe immer wieder in blosse Functionen von X_1, X_2, Z übergehen.

Hierin bezeichnet das Symbol $[uv]$ allgemein den Ausdruck

(11)
$$[uv] \equiv \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial y_2} + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y_2}\right),$$

sodass also nach (5′) insbesondere

(12)
$$\{uv\} \equiv [uv] - u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}$$

ist.

C. Ein Hauptmittel zur Vereinfachung von Gruppen besteht in der *Einführung neuer Variabeln* durch eine endliche Transformation, hier natürlich durch eine Berührungstransformation. Wir schicken daher auch einige Bemerkungen hierüber voraus.

Bei einer derartigen Einführung neuer Variabeln findet ein wohl zu beachtender *Unterschied* statt zwischen der homogenen und der nicht-homogenen Darstellung der Transformationen.

Ist nämlich zunächst H die characteristische Function einer in den Veränderlichen x, p geschriebenen infinitesimalen Berührungstransforma-

tion, so hat letztere selbst nach (4) das Symbol (Hf). Wenn wir nun vermöge irgend einer endlichen Berührungstransformation

$$(13)\qquad \begin{aligned} x'_k &= x'_k(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \\ p'_k &= p'_k(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \qquad (k=1,2,3)$$

die neuen Veränderlichen x', p' anstelle der x, p einführen, so geht dadurch die infinitesimale Transformation (Hf) über in

$$\sum_1^3{}_i\left\{(Hx'_i)\frac{\partial f}{\partial x'_i} + (Hp'_i)\frac{\partial f}{\partial p'_i}\right\}.$$

Hier ist nach (5):

$$(Hx'_i) \equiv \sum_1^3{}_\lambda\left(\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\frac{\partial x'_i}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial H}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x'_i}{\partial p_\lambda}\right), \qquad (Hp'_i) \equiv \sum_1^3{}_\lambda\left(\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\frac{\partial p'_i}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial H}{\partial x_\lambda}\frac{\partial p'_i}{\partial p_\lambda}\right),$$

wo wieder

$$\frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \equiv \sum_1^3{}_\nu\left(\frac{\partial H'}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial H'}{\partial p'_\nu}\frac{\partial p'_\nu}{\partial p_\lambda}\right), \qquad \frac{\partial H}{\partial x_\lambda} \equiv \sum_1^3{}_\lambda\left(\frac{\partial H'}{\partial x'_\nu}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H'}{\partial p'_\nu}\frac{\partial p'_\nu}{\partial x_\lambda}\right)$$

ist, wenn wir die Function H, nachdem in ihr die Substitution (13) gemacht ist, durch H' bezeichnen. Da (13) eine Berührungstransformation darstellt, so ist ferner nach einem bekannten allgemeinen Satze[1] jedes

$$(x'_\lambda x'_i) \equiv (p'_\lambda p'_i) \equiv 0, \qquad \lambda \neq i\colon\ (x'_\lambda p'_i) \equiv 0, \qquad (p'_\lambda x'_\lambda) \equiv 1.$$

Mithin wird:

$$(Hx'_i) \equiv \frac{\partial H'}{\partial p'}, \qquad (Hp'_i) \equiv -\frac{\partial H'}{\partial x'_i},$$

sodass also die Berührungstransformation (Hf), geschrieben in den accentuierten Variabeln, die Form annimmt:

$$\sum_1^3{}_i\left(\frac{\partial H'}{\partial p'_i}\frac{\partial f}{\partial x'_i} - \frac{\partial H'}{\partial x'_i}\frac{\partial f}{\partial p'_i}\right).$$

In den neuen Variabeln hat sie mithin H' zur characteristischen Function.

Dies Ergebnis können wir so aussprechen: Der Begriff der characteristischen Function einer infinitesimalen Berührungstransformation in den

[1] Vgl. Lie, a. a. O. p. 236, oder auch Mayer, a. a. O. p. 308.

homogenen Variabeln x, p verhält sich der Einführung neuer homogener Variabeln vermöge einer Berührungstransformation gegenüber invariant.

Dies gilt nun durchaus nicht mehr stets bei der Benutzung der nicht-homogenen Veränderlichen x_1, x_2, z, y_1, y_2. Aus der obigen infinitesimalen Berührungstransformation (Hf) gehe nämlich durch Einführung der nicht-homogenen Variabeln

$$(14) \qquad x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = z, \quad y_1 = -\frac{p_1}{p_3}, \quad y_2 = -\frac{p_2}{p_3}$$

etwa die infinitesimale Berührungstransformation mit der characteristischen Function W hervor. Nach (7) ist dann

$$H = -p_3 W$$

eine blosse Folge von (14). Wenn wir nun die den Gleichungen (13) entsprechenden Formeln in nicht-homogenen Variabeln

$$(15) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1'(x_1, x_2, z, y_1, y_2), \\ x_2' = x_2'(x_1, x_2, z, y_1, y_2), \\ z' = z'(x_1, x_2, z, y_1, y_2); \end{cases} \qquad \begin{matrix} y_1' = y_1'(x_1, x_2, z, y_1, y_2) \\ y_2' = y_2'(x_1, x_2, z, y_1, y_2) \end{matrix}$$

benutzen, um die accentuierten Variabeln in die infinitesimale Transformation (W) einzuführen, so geht diese über in eine Berührungstransformation, welche in den x', z', y' die characteristische Function Ω besitze. Die dieser entsprechende Berührungstransformation in homogenen Veränderlichen x', p' hat nach dem obigen die characteristische Function H', und es ist nach (7):

$$H' = -p_3' \Omega.$$

Vorher hatten wir:

$$H = -p_3 W$$

und mithin zeigt sich, dass vermöge unserer Substitutionen

$$(16) \qquad \Omega = \frac{p_3}{p_3'} W$$

sein muss. Der Factor $\frac{p_3}{p_3'}$ hat eine besondere Bedeutung. Bei der Berührungstransformation (15) ist nämlich etwa

$$dz' - y_1' dx_1' - y_2' dx_2' = \rho(dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2),$$

während wir bei (13) haben:

$$p_1'dx_1' + p_2'dx_2' + p_3'dx_3' = p_1dx_1 + p_2dx_2 + p_3dx_3.$$

Erstere Gleichung muss aus letzterer durch Division derselben mit p_3' und Einführung der nicht-homogenen Veränderlichen hervorgehen und deshalb folgt, dass

$$\rho = \frac{p_3}{p_3'}$$

ist vermöge unserer Substitutionen. (16) reduciert sich also auf

(17) $$\Omega = \rho W.$$

Wenn daher in eine in den nicht-homogenen Variabeln x_1, x_2, z, y_1, y_2 geschriebene infinitesimale Berührungstransformation mit der characteristischen Function W neue Variabeln $x_1', x_2', z', y_1', y_2'$ vermöge einer endlichen Berührungstransformation, bei der etwa

$$dz' - y_1'dx_1' - y_2'dx_2' = \rho(dz - y_1dx_1 - y_2dx_2)$$

ist, eingeführt werden, so geht die characteristische Function der neuen infinitesimalen Berührungstransformation aus ρW durch die Substitution der neuen Variabeln hervor.

Wie man sieht, verhält sich der Begriff der characteristischen Function einer Berührungstransformation in x_1, x_2, z, y_1, y_2 im allgemeinen nicht invariant gegenüber der Einführung neuer nicht-homogener Variabeln vermöge einer Berührungstransformation.

D. Wir wenden uns jetzt nach diesen allgemeineren Bemerkungen zu unserem eigentlichen Probleme, das wir so aussprechen:

Problem: *Es sollen alle Typen von irreducibeln Gruppen von Berührungstransformationen in x_1, x_1, z, y_1, y_2 gefunden werden, welche endlich und continuierlich sind und bei denen eine Schar von Gleichungen*

$$\Phi(x_1, x_2, z, y_1, y_2) = \text{Const.}$$

invariant bleibt.

Da nach einem allgemeinen Satze[1] jede Function Φ von x_1, x_2, z, y_1, y_2 vermöge einer Berührungstransformation in jede andere derartige Function verwandelt werden kann, so können wir auch die hier vorliegende Gleichungenschar $\Phi = \text{Const.}$ durch eine Berührungstransformation etwa in die Gleichungenschar

$$x_2 = \text{Const.}$$

überführen. Wir dürfen uns deshalb unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung darauf beschränken, alle Typen von endlichen continuierlichen und irreducibelen Gruppen von Berührungstransformationen des R_3 aufzustellen, bei denen x_2 nur von x_2 selbst abhängige Incremente erhält, sodass jeder Verein von Flächenelementen, der durch eine Curve parallel der x_1z-Ebene des R_3 dargestellt wird, vermöge der Transformationen dieser Gruppen in ebensolche Vereine übergeführt wird.

Es seien nun

$$B_k f = \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \zeta_k\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_{k1}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{k2}\frac{\partial f}{\partial y_2} \qquad (k=1,2\ldots r)$$

die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen einer solchen Gruppe. $B_k x_2$ muss dann eine Function von x_2 allein sein, mit anderen Worten: *ξ_{k2} darf nur von x_2 abhängen.* Die *verkürzten* Transformationen

$$\xi_{k2}(x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

erzeugen daher für sich eine Gruppe und zwar — als Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit x_2 — eine *höchstens dreigliedrige.*[2] Daraus folgt, dass wir annehmen können, dass mindestens $r - 3$ von den $B_k f$ frei von dem Gliede in $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ seien, also die Form haben:

$$A_k f = \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_k\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_{k1}\frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{k2}\frac{\partial f}{\partial y_2} \qquad (k=1,2\ldots s,\ s \geqq r-3).$$

---

[1] Vgl. LIE, a. a. O. p. 296. Das dort mit XXI bezeichnete Theorem zieht den oben berührten Satz nach sich.

[2] Siehe LIE. *Theorie der Transformationsgruppen* I. Math. Annalen. Bd. 16, p. 441 ff.

Zu diesen Transformationen $A_k f$ treten noch 0, 1, 2 oder 3 Transformationen hinzu, welche $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ enthalten und — wie man ohne Mühe einsieht — in der Form angenommen werden können:

$$C_1 f = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + Z_1 \frac{\partial f}{\partial z} + Y_{11} \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_{12} \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$C_2 f = X_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + Z_2 \frac{\partial f}{\partial z} + Y_{21} \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_{22} \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$C_3 f = X_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + Z_3 \frac{\partial f}{\partial z} + Y_{31} \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_{32} \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

Mithin sind 4 verschiedene Fälle zu unterscheiden. In ihnen treten je folgende infinitesimale Transformationen in der gesuchten Gruppe auf:

1) $A_1 f, A_2 f, \ldots, A_s f$;

2) $A_1 f, A_2 f, \ldots, A_s f, \quad C_1 f$;

3) $A_1 f, A_2 f, \ldots, A_s f, \quad C_1 f, C_2 f$;

4) $A_1 f, A_2 f, \ldots, A_s f, \quad C_1 f, C_2 f, C_3 f$.

Zu allen diesen infinitesimalen Berührungstransformationen gehören characteristische Functionen. Die zu $A_k f$ gehörige bezeichnen wir durch W_k. Nach (3') ist dann $\frac{\partial W_k}{\partial y_2}$ bis auf eine infinitesimale Constante das Increment von x_2 bei $A_k f$. x_2 aber wird durch $A_k f$ nicht transformiert und folglich ist

$$\frac{\partial W_k}{\partial y_2} = 0,$$

d. h. *die* W_k *sind frei von* y_2.

Daher kommt y_2 überhaupt nicht in den $\xi_{k1}, \zeta_k, \eta_{k1}, \eta_{k2}$ vor, wie ebenfalls aus den Formeln (3') erhellt. Auch jedes $(A_i A_k)$ und schliesslich auch jedes $(A_i C_k)$ ist frei von $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, d. h. diese Klammerausdrücke sind linear mit constanten Coefficienten aus $A_1 f, \ldots, A_s f$ ableitbar, mit anderen Worten: $A_1 f, \ldots, A_s f$ erzeugen in allen oben unterschiedenen Fällen eine *s-gliedrige Untergruppe* der ganzen Gruppe — nämlich diejenige, bei der x_2 invariant bleibt — und zwar ist diese Untergruppe in der ganzen

Gruppe *invariant.* Es erhellt hieraus, dass *wir unser Bestreben zunächst darauf zu richten haben, alle Typen von Berührungstransformationsgruppen von der Form $A_1 f, \ldots, A_s f$ aufzustellen, und dann später zu diesen Typen* 1, 2 *oder* 3 *Transformationen von der Form Cf in geeigneter Weise hinzuzufügen haben.*

Dabei aber erhebt sich noch eine *fundamentale Frage:*

Gesetzt nämlich, dass die ganze Gruppe der Af und Cf (in irgend einem unserer Fälle) irreducibel ist, ist dann auch ihre invariante Untergruppe $A_1 f, \ldots, A_s f$ irreducibel oder nicht?

Könnten wir diese Frage bejahend beantworten, so brauchten wir nicht *alle* Typen von Gruppen $A_1 f, \ldots, A_s f$, sondern nur die *irreducibelen* aufzustellen, was eine ganz bedeutende Erleichterung gewähren würde. Dass dem nun in der That so ist, werden die folgenden Betrachtungen als Endresultat ergeben.

E. Die aus den $A_k f$ *verkürzten* infinitesimalen Transformationen

$$A_k f \equiv \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} + \eta_{k1}\frac{\partial f}{\partial y_1} \qquad (k=1,2,\ldots,s)$$

bilden, da sie von y_2 frei sind, ebenso wie die $A_k f$ selbst eine *Gruppe* (freilich im allgemeinen keine Gruppe von Berührungstransformationen des R_3). Diese Gruppe enthält allerdings x_2; aber x_2 hat in ihr nicht den Character einer Variabeln. Die $\bar{A}_k f$ sind in der *Ebene* $x_2 =$ Const. Berührungstransformationen, was man geometrisch leicht einsehen kann. Da nämlich die $A_k f$ Berührungstransformationen des R_3 vorstellen, so führen sie vereinigte Flächenelemente wieder in vereinigte über. Greifen wir nun in der Ebene $x_2 =$ Const. zwei vereinigte Linienelemente heraus, so können wir durch jedes derselben irgend ein Flächenelement des R_3 legen. Diese beiden Flächenelemente liegen offenbar auch vereinigt, und $A_k f$ führt sie wieder in vereinigte Flächenelemente über. Da jedoch $A_k f$ x_2 invariant lässt, so müssen die beiden transformierten Flächenelemente mit der Ebene $x_2 =$ Const. je ein Linienelement gemein haben, und diese beiden Linienelemente liegen natürlich wieder vereinigt. Andererseits giebt $\bar{A}_k f$ an, wie die *Linien*elemente (x_1, z, y_1) der Ebene $x_2 =$ Const. transformiert werden, wenn $A_k f$ selbst die *Flächen*elemente (x_1, x_2, z, y_1, y_2) des R_3 untereinander vertauscht. Also führt $\bar{A}_k f$ ver-

einigte Linienelemente in jeder Ebene $x_2 =$ Const. wieder in vereinigte Linienelemente über, was zu beweisen war.

Man kann nun leicht einsehen, *dass, wenn die Gruppe der* $\bar{A}_k f$ *in der Ebene allgemeiner Lage* $x_2 =$ Const. — *als Gruppe von Berührungstransformationen in dieser Ebene — reducibel ist, dann auch die* $A_k f$ *eine reducibele Gruppe von Berührungstransformationen des* R_3 *erzeugen.* Ist nämlich die Gruppe der $\bar{A}_k f$ in der Ebene $x_2 =$ Const. reducibel, so lässt sich vermöge einer Berührungstransformation in x_1, z, y_1 in der Ebene $x_2 =$ Const. erreichen, dass die Gruppe $\bar{A}_k f$ in eine Gruppe von blossen *Punkt*transformationen übergeht. Die $\bar{A}_k f$ führen also dabei alle Linienelemente der Ebene $x_2 =$ Const. durch einen Punkt wieder in ebensolche über. Die zugehörigen $A_k f$ müssen dann natürlich auch alle Flächenelemente des R_3 durch einen Punkt in ebensolche überführen, d. h. auch die $A_k f$ sind blosse Punkttransformationen.

Zur Vollständigkeit dieses Beweises erübrigt nur noch zu bemerken, *dass es stets eine Berührungstransformation des* R_3 *giebt, welche in jeder Ebene* $x_2 =$ Const. *eine gegebene Berührungstransformation derselben darstellt und* x_2 *selbst nicht transformiert.* Von dieser Behauptung möge man sich durch einfache Berechnung überzeugen.

Wir wollen noch bemerken, dass es nicht schwer ist, die im vorhergehenden gemachten geometrischen Betrachtungen in die Sprache der Analysis zu übersetzen.

F. Nunmehr werden wir zeigen, *dass, wenn die Gruppe* $A_k f$ *reducibel ist, auch die im Abschnitt* D. *unter* 2), 3), 4) *aufgezählten Gruppen* $A_1 f, \ldots, A_s f, C_1 f, \ldots, C_i f (i = 1, 2, 3)$ *reducibel sind.*

Ist die Gruppe $A_k f$ reducibel, so gilt dasselbe offenbar von der Gruppe $\bar{A}_k f$ in den Ebenen $x_2 =$ Const. In jeder Ebene $x_2 =$ Const. muss also *mindestens* eine Schar von ∞^2 Vereinen von Flächenelementen existieren, die bei den $\bar{A}_k f$ in sich transformiert wird. Existiert *nur eine* solche Schar in jeder der Ebenen, so ist der Nachweis geliefert. Denn eine solche Schar von Vereinen wird durch ∞^2 Curven (oder im besonderen durch die ∞^2 Punkte) einer Ebene $x_2 =$ Const. dargestellt. Bei den $A_k f$ bleibt in jeder Ebene eine bestimmte Schar invariant, und da die $A_k f$ eine *invariante* Untergruppe der ganzen Gruppe $A_k f$, $C_i f$ darstellen, so führt nun auch jedes Cf die invariante Schar einer jeden Ebene $x_2 =$ Const. in die

einzige invariante Schar einer zweiten Ebene $x_2 =$ Const. über. Daher lässt die ganze Gruppe $A_k f$, $C_i f$ insgesamt ∞^3 Curven (resp. alle ∞^3 Punkte) in den Ebenen invariant. Diese Curven stellen im R_3 eine invariante Schar von ∞^3 Vereinen von Flächenelementen dar (und zwar selbstverständlich eine solche, die wirklich alle ∞^5 Flächenelemente des R_3 umfasst), d. h. die ganze Gruppe $A_k f$, $C_i f$ ist auch reducibel.

Dieser Beweis gilt auch dann, wenn in jeder Ebene $x_2 =$ Const. eine *discrete* Zahl von invarianten Scharen von ∞^2 Curven bei der Gruppe $A_k f$ existiert, aber nicht mehr, wenn *unendlich viele* Scharen in jeder Ebene vorhanden sind. In diesem letzteren Falle verfahren wir nach Lie vielmehr wie folgt:

Existieren in jeder Ebene $x_2 =$ Const. unendlich viele bei den $A_k f$ invariante Scharen von je ∞^2 Curven, so betrachten wir die durch ein Linienelement einer Ebene $x_2 =$ Const. hindurchgehenden Curven der Scharen. Von *jeder* einzelnen Schar geht durch dasselbe eine oder jedenfalls nur eine discrete Zahl von Curven hindurch. Ist letzteres der Fall, so können wir bei einer der Scharen aus dieser discreten Reihe eine bestimmte Curve auswählen. Damit ist auch bei jeder anderen Schar der Ebene eine bestimmte Curve ausgewählt, da ja die unendlich vielen Scharen eine *continuierliche* Mannigfaltigkeit bilden. Wir können daher überhaupt für die folgende Betrachtung annehmen, dass durch ein bestimmtes Linienelement nur je eine Curve jeder Schar hindurchgehe.

Jedes Linienelement $L(x_1, z, y_1)$ der Ebene $x_2 =$ Const. interpretieren wir nun als Punkt A eines dreifach ausgedehnten Raumes P_3 mit den Coordinaten x_1, z, y_1. Alsdann entspricht einer durch das Element L gehenden Curve k (d. h. einem Verein von Linienelementen, dem L angehört) der Ebene $x_2 =$ Const. eine durch diesen Punkt A des P_3 laufende Curve $\varkappa$, welche in A eine Tangentialrichtung $\tau_\varkappa$ besitzt, die dem durch die Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

im P_3 dargestellten *ebenen Strahlenbüschel* mit dem Scheitel A angehört, denn diese Gleichung ist ja die Bedingung der vereinigten Lage zweier Linienelemente in x_1, z, y_1. Da bei den $A_k f$ jede der unendlich vielen Scharen von ∞^2 Curven der Ebene $x_2 =$ Const. einzeln invariant ist und von jeder dieser Scharen eine Curve k durch L geht, so ist klar, dass,

wenn ein $A_k f$ L nach L' transformiert, alsdann die Curve k in eine ganz bestimmte Curve k' durch L' übergeht. L' und k' entspricht im P_3 ein Punkt A' und eine durch ihn laufende Curve $\varkappa'$, die in A' eine Tangentialrichtung $\tau'_\varkappa$ besitzt, welche einem gewissen ebenen Strahlenbüschel angehört. Bleibt bei $A_k f$ L fest, so gilt dasselbe von A und den Richtungen $\tau_\varkappa$ durch A.

Also sehen wir: Bei der Gruppe $A_k f$ sind den Punkten A *sämtliche* durch A gehende Richtungen $\tau_\varkappa$ des ebenen Büschels *als invariant zugeordnet.*

Nun führen wir eine Transformation Cf aus, welche jene beliebig gewählte Ebene $x_2 =$ Const. invariant lässt. Wenn etwa Cf A in A' überführt, so werden allerdings auch die Richtungen des Büschels in A in die des Büschels in A' transformiert, jedoch nicht mehr in derselben Weise wie durch irgend ein $A_k f$, das auch A nach A' führt, denn Cf transformiert ja auch die Ebenen $x_2 =$ Const. Wir werden aber zeigen, dass bei den Cf jedem Punkte A des P_3 nun zwar nicht jede einzelne Richtung des Büschels, aber doch *wenigstens eine* Richtung desselben als invariant zugeordnet ist. Wir betrachten hierzu insbesondere alle Cf unserer Gruppe $A_k f$, $C_i f$, welche den Punkt A des P_3 invariant lassen. Da überhaupt *höchstens drei* Cf vorhanden sind, so giebt es sicher *höchstens zwei* Cf, bei denen A fest bleibt. Diese vertauschen dann die Richtungen $\tau_\varkappa$ des durch A gehenden Büschels und zwar vermöge einer höchstens zweigliedrigen projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit dieser Richtungen. Eine solche aber lässt *mindestens eine* Richtung $\tau_\varkappa$ fest. Folglich bleibt, wenn A in dieser Weise festgehalten wird, auch eine Richtung τ_k durch A invariant.

Wir finden daher: *Bei der Gruppe $A_k f$, $C_i f$ werden die Punkte A des P_3 untereinander transformiert. Aber mit dem Punkte A bleibt stets mindestens eine der durch ihn gehenden Richtungen $\tau_\varkappa$ invariant verbunden.*

Es sind jedoch 3 Fälle möglich: Es sind mit A invariant verbunden:

entweder nur eine Richtung $\tau_\varkappa$
oder zwei Richtungen $\tau_\varkappa$
oder endlich alle Richtungen $\tau_\varkappa$.

Im ersten und zweiten Falle fahren wir so fort: Gehen wir von A aus in einer der mit A invariant verbundenen Richtungen $\tau_\varkappa$ zu einem benachbarten A über und schreiten in dieser Weise weiter, so erhalten wir eine

Curve des P_3 von der Eigenschaft, dass jedem ihrer Punkte die Tangentialrichtung als invariant zugeordnet ist. Wir erhalten im ganzen entweder eine oder zwei Scharen von ∞^2 Curven des P_3, und jede Schar ist bei der Gruppe $A_k f$, $C_i f$ invariant. Einer solchen Schar entsprechen auch in jeder der Ebenen $x_2 =$ Const. ∞^2 Curven und durch die Cf werden die der einen Ebene in die der anderen transformiert. Hiermit ist aber das erreicht, was in dem vorherbetrachteten einfacheren Falle (wo in jeder Ebene $x_2 =$ Const. nur eine bei den $A_k f$ invariante Schar existierte) sich ergab. Wir können also auf das dort Gesagte weiter verweisen. Im dritten Falle, wo mit dem Punkte A alle Richtungen τ_x des ebenen Büschels invariant verbunden sind, haben wir allerdings wieder ∞^1 invariante Scharen von je ∞^2 Curven — wie oben —, aber jetzt derart, dass alle Transformationen Cf, welche die Ebene $x_2 = x_2^0$ in dieselbe Ebene $x_2 = x_2^1$ überführen, auch eine jede dieser Scharen der Ebene (x_2^0) in je ein und dieselbe Schar der Ebene (x_2^1) überführen, sodass auch hier die Reducibilität der Gruppe $A_k f$, $C_i f$ nachgewiesen ist (indem jetzt die Reduction auf blosse Punkttransformationen auf unendlich viele Weisen möglich wird).

Hiermit ist der versprochene Nachweis geführt:

Wenn die Gruppe $A_k f$ reducibel ist, so gilt dasselbe von der Gruppe $A_k f$, $C_i f$.

Andererseits erkannten wir schon vorher:

Wenn die Gruppe $\bar{A}_k f$ in der Ebene allgemeiner Lage $x_2 =$ Const. reducibel ist, so gilt dasselbe von der Gruppe $A_k f$ des R_3.

Fassen wir beide Sätze zusammen, so folgt:

Ist die Gruppe $\bar{A}_k f$ in der Ebene allgemeiner Lage $x_2 =$ Const. reducibel, so gilt dasselbe von der ganzen Gruppe $A_k f$, $C_i f$.

Nach den früheren Bemerkungen können wir uns mithin in allem Folgenden darauf beschränken, diejenigen Gruppen $A_k f$ zu betrachten, deren zugehörige verkürzte Gruppen $\bar{A}_k f$ in der Ebene allgemeiner Lage $x_2 =$ Const. irreducibel sind. (Vgl. Schlussbemerkung von Abschnitt D.)

In der Ebene (x_1, z, y_1) giebt es nun, wie Lie gezeigt hat, nur *drei* irreducibele Gruppentypen, nämlich diese:

Erstens:[1]

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{2} y_1^2 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Zweitens: Die vorigen Transformationen und überdies

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + 2z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Drittens: Ausser den 7 genannten Transformationen noch

$$\frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1 z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(z - x_1 y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{1}{2} y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{1}{2} x_1 y_1^2 \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\left(x_1 z - \frac{1}{2} x_1^2 y_1\right) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \left(y_1 z - \frac{1}{2} x_1 y_1^2\right) \frac{\partial f}{\partial y_1} + \left(z^2 - \frac{1}{4} x_1^2 y_1^2\right) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Kürzer schreiben sich diese Gruppen in ihren characteristischen Functionen, nämlich

Erstens:[1]

$$1, \; x_1, \; y_1, \; x_1^2, \; x_1 y_1, \; y_1^2;$$

Zweitens:

$$1, \; x_1, \; y_1, \; x_1^2, \; x_1 y_1, \; y_1^2, \; x_1 y_1 - 2z;$$

Drittens:

$$1, \; x_1, \; y_1, \; x_1^2, \; x_1 y_1, \; y_1^2, \; x_1 y_1 - 2z,$$

$$x_1(x_1 y_1 - 2z), \; y_1(x_1 y_1 - 2z), \; (x_1 y_1 - 2z)^2.$$

Wenn wir also in den $\overline{A}_k f$ $x_2 \neq$ Const. setzen, so müssen sich diese Transformationen auf die einer der drei soeben angegebenen Gruppen reducieren, wie wir annehmen dürfen. Damit ist dann die *allgemeine Form der* $\overline{A}_k f$ und hiermit auch unmittelbar die der $A_k f$ selbst gefunden. Wie dieselben weiter zu behandeln sind, werden wir im folgenden darlegen.

[1] Siehe LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, Abhandlung IV und V im Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 1878, 1879.

§ 1. *Die Gruppen $A_k f$, welche die Linienelemente der Ebenen $x_2 =$ Const. 6- oder 7-gliedrig transformieren.*

Wir betrachten in diesem Paragraphen diejenigen Gruppen $A_k f$, bei welchen sich die verkürzten Transformationen $\bar{A}_k f$ für $x_2 =$ Const. auf den *ersten* oder *zweiten* der pag. 129 angegebenen Typen der Ebene reducieren, bei denen also $\bar{A}_k f$ die allgemeine Form hat:

$$\bar{A}_k f = X_{k1}\frac{\partial f}{\partial z} + X_{k2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1\frac{\partial f}{\partial z}\right) + X_{k3}\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_{k4}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{1}{2}x_1^2\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$+ X_{k5}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + X_{k6}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial f}{\partial z}\right) + X_{k7}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + 2z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s)$$

wo die X Functionen von x_2 allein bezeichnen und im *ersten* Falle insbesondere jedes $X_{k7} \equiv 0$ zu setzen ist. Mit Hülfe der Formeln (3′) der Einleitung können wir aus den Incrementen von x_1 und z, da x_2 bei den $A_k f$ das Increment 0 hat, die zugehörige characteristische Function W_k von $A_k f$ berechnen. Es zeigt sich, dass diese die Form hat:

$$(1)\qquad W_k = \frac{1}{2}A_k x_1^2 + B_k x_1 y_1 + \frac{1}{2}C_k y_1^2 + D_k x_1 + E_k y_1 + F_k + G_k(x_1 y_1 - 2z),$$

wo $A_k, B_k, \ldots, G_k$ Functionen von x_2 allein sind, die sich durch die $X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{k7}$ in einer uns gleichgültigen Weise ausdrücken, und dass im *ersten* Falle insbesondere jedes $G_k \equiv 0$ ist.

Es kommt nun darauf an, die Functionen $A_k, \ldots, G_k$ von x_2 so zu bestimmen, dass $W_1, \ldots, W_s$ wirklich die characteristischen Functionen einer Gruppe sind, d. h. dass jedes $\{W_i W_k\}$ sich in der Form

$$\{W_i W_k\} \equiv \sum_{1}^{s}{}_{\sigma}\, c_{ik\sigma} W_\sigma$$

darstellt, wo die $c_{ik\sigma}$ blosse Constanten sein müssen. Es gilt nämlich bekanntlich der Satz:

Sind $A_1 f, \ldots, A_s f$ infinitesimale Berührungstransformationen in x_1, x_2, y_1, y_2, z und $W_1, \ldots, W_s$ ihre characteristischen Functionen, so zieht die Relation

$$(A_i A_k) \equiv \sum_1^s {}_\sigma c_{ik\sigma} A_\sigma f$$

die Relation

$$\{W_i W_k\} \equiv \sum_1^s {}_\sigma c_{ik\sigma} W_\sigma$$

nach sich und umgekehrt. Die $c_{ik\sigma}$ bedeuten hierbei Constanten.

Wir haben im vorhergehenden gleich *zwei Fälle* zusammengefasst, nämlich denjenigen, in welchem die zugehörige Gruppe der Ebene $x_2 =$ Const. 6-, und den, in welchem sie 7-gliedrig ist. Dass sich aber letzterer Fall auf den ersteren zurückführen lässt, kann so eingesehen werden:

Im *zweiten* Falle wird eine Anzahl der Functionen W_k die Grösse $x_1 y_1 - 2z$, die wir kurz ω nennen werden, wirklich enthalten. Wir wollen diese Functionen zur Unterscheidung mit $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ bezeichnen und unter den W dann nur solche der Functionen (1) verstehen, welche von ω frei sind. Vorausgesetzt wird natürlich, dass die Ω linear unabhängig von einander seien und dass kein Ausdruck Σ Const. Ω frei von ω werde. Jedes $\{W_i W_k\}$ muss sich nun in der Form

$$\Sigma \text{ Const. } \Omega + \Sigma \text{ Const. } W$$

darstellen. Aber die allgemeine Combinationsformel (5') der Einleitung lehrt, dass $\{W_i W_k\}$ ebenso wie W_i und W_k selbst frei von ω ist, d. h. es muss sein:

$$\{W_i W_k\} \equiv \Sigma \text{ Const. } W.$$

Die infinitesimalen Transformationen $(W_1), (W_2), \ldots$ bilden also für sich eine *Untergruppe.* Dieselbe ist in der ganzen Gruppe *invariant.* Wenn wir nämlich $\{W_i \Omega_k\}$ bilden, so erkennen wir unschwer, dass auch dies frei von ω ist. Schliesslich lehrt nun auch die Bildung von $\{\Omega_i \Omega_k\}$, dass dieser Klammerausdruck ω nicht enthält. Daraus erhellt aber, dass wir unsere ganze Gruppe symbolisch in folgender Form schreiben können:

(2) $$\Bigg[\Big[\big[\,W_1, W_2, \ldots, W_t\,\big]\;\Omega_1\Big]\;\Omega_2\Bigg]\;\ldots\;\Omega_r \qquad t+r=s$$

wo jede Umrahmung die characteristischen Functionen einer Untergruppe enthält und überdies andeutet, dass die betreffende Untergruppe in der sie zunächst umfassenden (und offenbar überhaupt in jeder sie umfassenden) Untergruppe invariant ist.

Aus dieser bemerkenswerten Gestalt (2) unserer Gruppe geht nun hervor, dass *die von* $(W_1), (W_2), \dots, (W_t)$ *erzeugte Untergruppe irreducibel sein muss, sobald die ganze Gruppe irreducibel ist.*

In der That, wenn die Gruppe der (W) reducibel wäre, so lehrt eine Betrachtung ganz analog der in der Einleitung unter F. durchgeführten, dass auch die nächste grössere Untergruppe $(W_1), \dots, (W_t), (\Omega_1)$ reducibel sein müsste. Anstelle der a. a. O. mit $A_k f$ bezeichneten infinitesimalen Transformationen treten nämlich jetzt die (W_k), anstelle der $C_t f$ tritt die eine infinitesimale Transformation (Ω_1), welche allerdings nicht wie jene $C f_t$ die Ebenen $x_2 = \text{Const.}$ unter einander vertauscht. Doch dies thut nichts zur Sache und es bedarf auch keiner weiteren Erläuterung des Beweisganges, da er sich ganz dem früheren anschliesst. Ebenso können wir ferner zeigen, dass, wenn die Gruppe $(W_1), \dots, (W_t), (\Omega_1)$ reducibel wäre, dasselbe von der Gruppe $(W_1), \dots, (W_t), (\Omega_1), (\Omega_2)$, in der jene als invariante Untergruppe enthalten ist, gelten würde u. s. w. Schliessliches Ergebnis ist, dass die *ganze* Gruppe der (W) und (Ω) reducibel sein müsste, was aber der Voraussetzung widerspricht, die wir über sie machen müssen.

Diejenigen infinitesimalen Transformationen der ganzen Gruppe also, deren characteristische Functionen von ω frei sind, erzeugen eine irreducibele invariante Untergruppe, sobald die ganze Gruppe irreducibel ist.

Hieraus ersehen wir, dass wir uns zunächst auf die Erledigung des *ersten* Falles, in welchem $W_1, \dots, W_s$ frei von $\omega = x_1 y_1 - 2z$ sind, beschränken können. Sind alle Gruppen in diesem Falle bestimmt, so haben wir nur noch infinitesimale Transformationen hinzuzufügen, deren characteristische Functionen ω enthalten.

Wir behandeln also zunächst das Problem, *alle Typen von endlichen continuierlichen und irreducibelen Gruppen von Berührungstransformationen zu finden, deren characteristische Functionen die allgemeine Form haben:*

$$(3) \qquad W_k \equiv \frac{1}{2} A_k x_1^2 + B_k x_1 y_1 + \frac{1}{2} C_k y_1^2 + D_k x_1 + E_k y_1 + F_k, \qquad (k=1,2,\dots,s)$$

wo die $A_k, B_k, \dots, F_k$ blosse Functionen von x_2 bezeichnen.

Wenden wir unseren Blick zurück auf die in der Einleitung unter C. über die *Einführung neuer Variabeln* gemachten Bemerkungen, so ersehen wir sofort, dass die Formen (3) (ja auch die Formen (1), was zu bemerken für späterhin wichtig ist) im wesentlichen ungeändert bleiben, wenn neue Variabeln $x'_1, x'_2, z', y'_1, y'_2$ vermöge einer solchen Berührungstransformation eingeführt werden, bei denen Gleichungen bestehen von der Form:

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha x'_1 + \beta y'_1 + \varepsilon, \qquad y_1 = \gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta, \\ x_2 = x'_2, \\ z = \rho z' + \frac{1}{2}\lambda x'^2_1 + \mu x'_1 y'_1 + \frac{1}{2}\nu y'^2_1 + \sigma x_1 + \tau y_1 + \upsilon, \end{cases}$$

in denen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \upsilon$ blosse Functionen von $x_2 = x'_2$ bedeuten. Solche Berührungstransformationen giebt es aber in der That. Wir brauchen nur die Gleichungen (4) der Bedingung zu unterwerfen:

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = \rho(dz' - y'_1 dx'_1 - y'_2 dx'_2), \qquad (\rho \neq 0)$$

aus der sich durch Ausrechnung ergiebt, dass diese eine Gleichung in die Forderungen zerfällt:

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda x'_1 + \mu y'_1 + \sigma - (\gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta)\alpha = -y'_1\rho, \\ \mu x'_1 + \nu y'_1 + \tau - (\gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta)\beta = 0, \\ \rho y'_2 + \rho z' + \frac{1}{2}\lambda x'^2_1 + \mu x'_1 y'_1 + \frac{1}{2}\nu y'^2_1 + \sigma x'_1 + \tau y'_1 + \upsilon \\ \qquad - (\gamma x'_1 + \delta y'_1 + \zeta)(\alpha x'_1 + \beta y'_1 + \varepsilon) = y_2. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung (5) bestimmt y_2 durch die accentuierten Variabeln, während die beiden ersteren wieder zerfallen in:

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda = \alpha\gamma, \qquad \mu + \rho = \alpha\delta, \qquad \sigma = \alpha\zeta, \\ \mu = \beta\gamma, \qquad \nu = \beta\delta, \qquad \tau = \beta\zeta, \\ \rho = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \end{cases}$$

d. h.

Wählt man somit $\lambda, \mu, \nu, \tau, \rho$ in dieser Weise, so kann man die Gleichungen (4) zu einer vollständigen Berührungstransformation des R_3 ergänzen. Über die Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \upsilon$ von x_2 kann man dabei noch beliebig, doch so, dass $\rho \neq 0$ wird, verfügen.

Um nun die accentuierten Variabeln in die characteristischen Functionen W_k einzuführen, haben wir zu beachten, dass

$$dz' - y_1' dx_1' - y_2' dx_2' = \frac{1}{\rho}(dz - y_1 dx_1 - y_1 dx_2)$$

ist. Nach dem früheren (pag. 121) müssen wir also W_k erst mit $\frac{1}{\rho}$ multiplicieren und dann in das Product $\frac{1}{\rho} W_k$ die x_1', x_2', z', y_1' vermöge (4) einführen. Dadurch ergiebt sich die neue characteristische Function (in der wir, wie überhaupt von jetzt ab, die lästigen Accente weglassen, da wir nur noch die neuen Variabeln gebrauchen, also keine Verwechselung vorkommen kann):

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad \overline{W}_k = {} & \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2} A_k \alpha^2 + B_k \alpha\gamma + \frac{1}{2} C_k \gamma^2\right] x_1^2 \\
& + \frac{1}{\rho}[A_k \alpha\beta + B_k(\alpha\delta + \beta\gamma) + C_k \gamma\delta] x_1 y_1 \\
& + \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2} A_k \beta^2 + B_k \beta\delta + \frac{1}{2} C_k \delta^2\right] y_1^2 \\
& + \frac{1}{\rho}[A_k \alpha\varepsilon + B_k(\alpha\zeta + \varepsilon\gamma) + C_k \gamma\zeta + D_k \alpha + E_k \gamma] x_1 \\
& + \frac{1}{\rho}[A_k \beta\varepsilon + B_k(\beta\zeta + \varepsilon\delta) + C_k \delta\zeta + D_k \beta + E_k \delta] y_1 \\
& + \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2} A_k \varepsilon^2 + B_k \varepsilon\zeta + \frac{1}{2} C_k \zeta^2 + D_k \varepsilon + E_k \zeta + F_k\right].
\end{aligned}
$$

Nun werden wir die Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, über die wir noch verfügen können, so zu wählen suchen, *dass möglichst viele Terme in einem W_k verschwinden.* Wir fragen zunächst, ob wir in (7) die Coefficienten von x_1^2 und y_1^2 zum Verschwinden bringen können. Dazu ist notwendig, dass

$$A_k \alpha^2 + 2 B_k \alpha\gamma + C_k \gamma^2 \equiv 0,$$

$$A_k \beta^2 + 2 B_k \beta\delta + C_k \delta^2 \equiv 0$$

sei. Die quadratische Gleichung

$$A_k\xi^2 + 2B_k\xi\eta + C_k\eta^2 = 0$$

muss also durch $\xi = \alpha, \eta = \gamma$ und durch $\xi = \beta, \eta = \delta$ befriedigt werden, mit anderen Worten, sie muss die Gleichung sein:

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \\ \alpha^2 & \alpha\gamma & \gamma^2 \\ \beta^2 & \beta\delta & \delta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus folgt (bis auf einen Proportionalitätsfactor, den wir gleich 1 annehmen):

$$(8) \qquad A_k = \gamma\delta\rho, \qquad -2B_k = (\alpha\delta + \beta\gamma)\rho, \qquad C_k = \alpha\beta\rho,$$

weil nämlich $\rho \equiv \alpha\delta - \beta\gamma$ ist. Zwischen diesen drei Functionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ besteht aber eine Relation

$$B_k^2 - A_kC_k = \frac{1}{4}\rho^4 \neq 0.$$

Also lässt sich unser Wunsch nur dann erfüllen, wenn wenigstens ein W_k existiert, in welchem $B_k^2 - A_kC_k \neq 0$ ist. Aber dann ist er auch sicher erfüllbar, wie man sofort sieht. Den *Ausnahmefall,* in welchem in (3) jedes $B_k \equiv \sqrt{A_kC_k}$ ist, wollen wir weiter unten vornehmen, um hier keine Störung zu bereiten.

Im *allgemeinen* ist unsere Absicht, in einem $\overline{W}_k$ die Coefficienten von x_1^2 und y_1^2 zum Verschwinden zu bringen, erreichbar. Wir haben dazu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gemäss (8) zu wählen, doch derart, dass $\rho \equiv \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ bleibt. Dann hat x_1y_1 in $\overline{W}_k$ nach (7) den Coefficienten $-\frac{1}{2}\rho^2 \neq 0$. x_1 und y_1 haben ferner die Coefficienten:

$$\frac{1}{\rho}[A_k\alpha\varepsilon + B_k(\alpha\zeta + \varepsilon\gamma) + C_k\gamma\zeta + D_k\alpha + E_k\gamma],$$

$$\frac{1}{\rho}[A_k\beta\varepsilon + B_k(\beta\zeta + \varepsilon\delta) + C_k\delta\zeta + D_k\beta + E_k\delta].$$

Wollen wir auch diese zum Verschwinden bringen, so haben wir zwei in ε und ζ lineare Gleichungen zu erfüllen, deren Determinante lautet:

$$\frac{1}{\rho^2}\begin{vmatrix} A_k\alpha + B_k\gamma & B_k\alpha + C_k\gamma \\ A_k\beta + B_k\delta & B_k\beta + C_k\delta \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\rho^2}(A_kC_k - B_k^2)(\alpha\delta - \beta\gamma),$$

d. h. nach (8):

$$-\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\cdot\rho \equiv -\frac{1}{4}\rho^3 \neq 0.$$

Also lassen sich auch diese Forderungen durch passende Wahl von ε und ζ erfüllen.

Damit wäre dann erreicht, dass ein $\overline{W}_k$ die bemerkenswert einfache Form annimmt:

$$\overline{W}_k \equiv -\frac{1}{2}\rho^2 x_1 y_1 + \varphi(x_2).$$

In dem oben bemerkten *Ausnahmefall* hat jedes W_k die Form

$$(A_k x_1 + \Gamma_k y_1)^2 + D_k x_1 + E_k y_1 + F_k$$

und es ist klar, dass mindestens zwei Ausdrücke $A_k x_1 + \Gamma_k y_1$ und $A_i x_1 + \Gamma_i y_1$ von einander unabhängig und $\neq 0$ sein müssen, weil sonst die zugehörige Gruppe der Ebene $x_2 =$ Const. nicht 6-, sondern weniger-gliedrig wäre. Dann können wir die allgemeinste characteristische Function der Gruppe bilden

$$\lambda\{(A_k x_1 + \Gamma_k y_1)^2 + \ldots\} + \mu\{(A_i x_1 + \Gamma_i y_1)^2 + \ldots\}, \qquad (\lambda, \mu = \text{Const.})$$

wo wir nur die quadratischen Glieder angegeben haben. Diese aber hat jene Ausnahmeform nur, wenn für alle Werte der Constanten λ, μ:

$$(\lambda A_k \Gamma_k + \mu A_i \Gamma_i)^2 \equiv (\lambda A_k^2 + \mu A_i^2)(\lambda \Gamma_k^2 + \mu \Gamma_i^2)$$

ist, d. h. im besonderen $\lambda\mu \equiv 0$ ist. Die Annahme, dass alle characteristischen Functionen der Gruppe jene Ausnahmeform haben, ist also an sich undenkbar.

Wir kehren deshalb zum allgemeinen Falle zurück. Wie wir gesehen haben, dürfen wir annehmen, dass unter den characteristischen Functionen (3) der gesuchten Gruppe eine von der Form

$$W = \lambda x_1 y_1 + \mu, \qquad (\lambda \neq 0)$$

enthalten sei, in der λ und μ Functionen von x_2 bezeichnen. Ehe wir hieraus weitere Schlüsse ziehen, bemerken wir: Alle characteristischen Functionen (3) haben die Form $u_2 + u_1$, wo u_2 quadratisch und homogen, u_1 linear in x_1, y_1 ist. Combinieren wir nun zwei solche Functionen $u_2 + u_1$ und $v_2 + v_1$ mit einander nach der allgemeinen Combinationsformel (5') der Einleitung, so sehen wir, dass in $\{u_2 + u_1, v_2 + v_1\}$ die quadratischen Glieder nur diese sind:

$$\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial y_1}.$$

Diese Bemerkung ist für das folgende, wo es uns immer nur auf die quadratischen Glieder ankommt und wir deshalb nur diese berechnen, von Nutzen.

Sicherlich muss ein W_k ein von Null verschiedenes A_k haben. Wir combinieren dasselbe mit obigem W und erhalten:

$$(B_k x_1 + C_k y_1)\lambda y_1 - (A_k x_1 + B_k y_1)\lambda x_1 + \ldots$$
$$\equiv - \lambda(A_k x_1^2 - C_k y_1^2) + \ldots .$$

Unter den W_k kommt daher sicher eine Function vor von der Form:

$$\frac{1}{2}(\sigma x_1^2 + \tau y_1^2) + \ldots, \qquad (\sigma \neq 0),$$

wo natürlich σ und τ Functionen von x_2 bedeuten. Ihre Combination mit W giebt:

$$\lambda(\tau y_1^2 - \sigma x_1^2) + \ldots .$$

Combinieren wir dies wieder mit W und fahren wir so fort, so ergeben sich successive die Functionen:

$$\sigma x_1^2 + \tau y_1^2 + \ldots,$$
$$\lambda^2(\sigma x_1^2 + \tau y_1^2) + \ldots,$$
$$\lambda^4(\sigma x_1^2 + \tau y_1^2) + \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

wo $\sigma \neq 0$ ist. Dies kann, wenn die Gruppe *endlich* sein soll, nur so ge-

schehen, dass $\lambda = \text{Const.}$ ist. Dann aber darf λ, da es $\neq 0$ ist, gleich 1 und also:

$$W = x_1 y_1 + \mu(x_2)$$

gesetzt werden. Wie wir soeben sahen, kommen die Functionen vor:

$$\sigma x_1^2 + \tau y_1^2 + \dots, \qquad \sigma x_1^2 - \tau y_1^2 + \dots,$$

d. h. auch

$$\sigma x_1^2 + \dots,$$

wo sicher $\sigma \neq 0$ ist.

Ganz analog (indem wir wissen, dass schliesslich unter den W_k noch eines, dessen $C_k \neq 0$ ist, existieren muss) ergiebt sich eine characteristische Function

$$\rho y_1^2 + \dots,$$

wo ρ sicher $\neq 0$ ist. Wir bilden:

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, \rho y_1^2 + \dots\} \equiv -4\sigma\rho x_1 y_1 + \dots,$$

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, \sigma\rho x_1 y_1 + \dots\} \equiv -2\sigma^2\rho x_1^2 + \dots,$$

$$\{\sigma^2\rho x_1^2 + \dots, \rho y_1^2 + \dots\} \equiv -4\sigma^2\rho^2 x_1 y_1 + \dots$$

u. s. w. So ergeben sich successive:

$$\sigma\rho x_1 y_1 + \dots, \quad \sigma^2\rho^2 x_1 y_1 + \dots, \quad \sigma^3\rho^3 x_1 y_1 + \dots,$$

was nur so angehen kann, dass $\sigma\rho = \text{Const.}$, d. h. etwa $= 1$ ist. Dann haben wir die beiden characteristischen Functionen

$$\sigma x_1^2 + \dots, \quad \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots.$$

Wir bilden weiterhin:

$$\left\{\sigma x_1^2 + \dots, \frac{1}{2} A_i x_1^2 + B_i x_1 y_1 + \frac{1}{2} C_i y_1^2 + \dots\right\} \equiv -2\sigma x_1 (B_i x_1 + C_i y_1) + \dots,$$

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, \sigma x_1 (B_i x_1 + C_i y_1) + \dots\} \equiv -2\sigma^2 C_i x_1^2 + \dots,$$

$$\left\{\frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots, \sigma^2 C_i x_1^2 + \dots\right\} \equiv 4\sigma C_i x_1 y_1 + \dots,$$

$$\left\{\frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots, \sigma C_i x_1 y_1 + \dots\right\} \equiv 2 C_i y_1^2 + \dots.$$

Wenn also

$$\frac{1}{2} A_i x_1^2 + B_i x_1 y_1 + \frac{1}{2} C_i y_1^2 + \dots$$

vorkommt, so kommt auch

$$C_i y_1^2 + \dots$$

vor, analog natürlich auch

$$A_i x_1^2 + \dots$$

und daher schliesslich noch

$$B_i x_1 y_1 + \dots .$$

Ausser solchen Functionen, welche nur linear in x_1, y_1 sind, enthält also die Gruppe nur noch solche von der Form:

$$x_1 y_1 + \mu(x_2),$$

$$\sigma x_1^2 + \dots, \quad \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots,$$

$$A_i x_1^2 + \dots, \quad B_i x_1 y_1 + \dots, \quad C_i y_1^2 + \dots .$$

Da sich ergiebt

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, B_i x_1 y_1 + \dots\} \equiv - 2\sigma B_i x_1^2 + \dots,$$
$$\{\sigma B_i x_1^2 + \dots, B_i x_1 y_1 + \dots\} \equiv - 2\sigma B_i^2 x_1^2 + \dots,$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

so muss $B_i \equiv \text{Const.}$ sein. Da schon die characteristische Function $x_1 y_1 + \mu$ vorkommt, so können wir $B_i \equiv 0$ setzen. Weiter ist

$$\{\sigma x_1^2 + \dots, C_i y_1^2 + \dots\} \equiv - 4\sigma C_i x_1 y_1 + \dots,$$

also $\sigma C_i \equiv \text{Const.}$ Ebenso kommt $\frac{1}{\sigma} A_i \equiv \text{Const.}$, d. h.

$$A_i \equiv \text{Const.}\ \sigma, \quad C_i \equiv \text{Const.} \frac{1}{\sigma},$$

sodass wir offenbar, da schon $\sigma x_1^2 + \dots$ und $\frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots$ vorkommen,

$$A_i \equiv C_i \equiv 0$$

setzen dürfen. Mithin bleiben von den quadratischen Functionen nur diese übrig

$$W_1 \equiv \sigma x_1^2 + \dots, \qquad W_2 \equiv x_1 y_1 + \mu(x_2), \qquad W_3 \equiv \frac{1}{\sigma} y_1^2 + \dots.$$

Durch *Einführung neuer Variabeln* vermöge der Berührungstransformation

$$(9) \qquad x_1' = x_1\sqrt{\sigma}, \quad y_1' = y_1 \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad x_2' = x_2, \quad y_2' = y_2 - \frac{1}{2}\frac{\sigma'}{\sigma} x_1 y_1, \quad z' = z,$$

bei der

$$dz' - y_1' dx_1' - y_2' dx_2' \equiv dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2$$

wird, erkennen wir sofort, dass diese drei characteristischen Functionen auf die speciellere Form gebracht werden können

$$W_1 \equiv x_1^2 + \dots, \qquad W_2 \equiv x_1 y_1 + \mu(x_2), \qquad W_3 \equiv y_1^2 + \dots,$$

während die linearen W_k ihre Form nicht wesentlich ändern.

Es ist etwa:

$$W_1 \equiv x_1^2 + ax_1 + by_1 + c,$$
$$W_3 \equiv y_1^2 + dx_1 + ey_1 + f,$$

wo $a, b, \dots, f$ Functionen von x_2 sind. Ihre Combination mit W_2 liefert die characteristischen Functionen

$$-2x_1^2 - ax_1 + by_1, \quad 2y_1^2 - dx_1 + ey_1.$$

Addieren wir die Hälfte der ersteren zu W_1 und subtrahieren wir die Hälfte der letzteren von W_3, so ergeben sich die Functionen

$$\frac{1}{2} ax_1 + \frac{3}{2} by_1, \quad \frac{3}{2} dx_1 + \frac{1}{2} ey_1.$$

Ziehen wir ihr doppeltes von W_1 resp. W_3 ab, so kommt

$$x_1^2 - 2by_1 + c, \quad y_1^2 - 2dx_1 + f.$$

Wenn wir mit diesen wie soeben mit W_1 und W_3 verfahren, so kommen die characteristischen Functionen by_1 und dx_1, sodass wir einfach

$$W_1 \equiv x_1^2 + \lambda, \qquad W_2 \equiv x_1 y_1 + \mu, \qquad W_3 \equiv y_1^2 + \nu$$

setzen dürfen, wo λ, μ, ν blosse Functionen von x_2 sind. Klammeroperationen zwischen diesen dreien lehren leicht, dass wir sie endlich in der Gestalt annehmen können

$$x_1^2\,,\ x_1 y_1\,,\ y_1^2.$$

Die übrigen, in x_1 und y_1 linearen characteristischen Functionen der Gruppe, von denen sicher drei existieren müssen, da die zugehörige Gruppe in der Ebene $x_2 = \text{Const.}$ 6-gliedrig sein soll, haben die Form

$$a(x_2)x_1 + b(x_2)y_1 + c(x_2).$$

Ihre Combinationen mit x_1^2, x_1y_1 und y_1^2 ergeben, dass ax_1, bx_1, ay_1, by_1, c, a^2, ab, b^2 characteristische Functionen sein müssen.

Somit ergiebt sich schliesslich die typische Form

I.

$x_1^2, \quad x_1y_1, \quad y_1^2,$
$A_i(x_2)x_1, \quad A_i(x_2)y_1, \quad B_k(x_2), \quad {\scriptstyle i=1,2,\ldots,s \atop k=1,2,\ldots,t}$
wo jedes $A_iA_j \equiv \Sigma$ Const. B sein muss.

Wir könnten diese Gruppe auch in ihren *infinitesimalen Transformationen* schreiben. Doch unterlassen wir dies, da sie dadurch nur unübersichtlich wird.

Um nun den *zweiten Fall* zu behandeln, in welchem auch characteristische Functionen Ω mit einem Gliede in $\omega = x_1y_1 - 2z$ auftreten (vgl. pag. 132), haben wir zunächst eine solche Function Ω_1 zum Typus I. hinzuzufügen. Ihre Combinationen mit jenen Functionen müssen in Gemässheit der Gestaltung (2) der Gruppe sich durch die Functionen des Typus I. allein linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. Wir erhalten aber, wenn wir setzen:

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}Ax_1^2 + Bx_1y_1 + \frac{1}{2}Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F + G\omega,$$

durch Combination mit x_1^2:

$$-2x_1(Bx_1 + Cy_1 + E),$$

mit x_1y_1:

$$Ax_1^2 - Cy_1^2 + Dx_1 - Ey_1,$$

mit y_1^2:

$$2y_1(Ax_1 + By_1 + D),$$

mit $A_i x_1$:

$$-A_i(Bx_1 + Cy_1 + E - Gx_1),$$

mit $A_i y_1$:

$$A_i(Ax_1 + By_1 + D + Gy_1),$$

mit B_k:

$$2B_k G.$$

Also sind A, B, C Constanten, die wir offenbar $\equiv 0$ annehmen können Ferner wird

$$E \equiv \Sigma \text{ Const. } A_i, \qquad D \equiv \Sigma \text{ Const. } A_i$$

und deshalb darf auch $E \equiv D \equiv 0$ angenommen werden. $B_k G$ muss unter den B_k enthalten sein, also auch $(B_k G).G = B_k G^2$, ferner $B_k G^3$ etc., woraus aber, da nicht alle $B_k \equiv 0$ sind, lediglich $G \equiv$ Const. folgt, sodass wir

$$\Omega_1 \equiv x_1 y_1 - 2z$$

setzen müssen.

Damit ist der Typus gefunden:

II.

$$\begin{array}{ccc} x_1^2, & x_1 y_1, & y_1^2, \\ A_i x_1, & A_i y_1, & B_k, \end{array}$$

$$\left(\text{wo jedes } A_i A_j \equiv \Sigma \text{ Const. } B_k\right)$$
$$i = 1, 2, \ldots, s, \quad k = 1, 2, \ldots, t.$$

$$x_1 y_1 - 2z.$$

Eine weitere Function Ω_2 mit ω können wir offenbar *nicht* hinzufügen; sie würde sich ja auch auf $x_1 y_1 - 2z$ reducieren.

Ob nun die beiden Typen I. und II., welche hiernach die einzigen sind, die es giebt, wirklich irreducibel sind oder nicht, wollen wir erst an einer späteren Stelle entscheiden. Wir werden ihre Irreducibilität nachweisen, natürlich nur unter der Annahme $s, t > 0$.

§ 2. *Die Gruppen $A_k f$, $C_i f$, deren Untergruppen $A_k f$ die Linienelemente der Ebenen $x_2 =$ Const. 6- oder 7-gliedrig transformieren.*

Wir wissen (vgl. pag. 123), dass, wenn die Ebenen $x_2 =$ Const. bei einer der gesuchten irreducibelen Gruppen von Berührungstransformationen des R_3 wirklich unter einander vertauscht werden, alsdann diejenigen Transformationen der Gruppe, welche diese Ebenen sämtlich einzeln stehen lassen, eine *invariante Untergruppe* erzeugen. Wenn nun bei diesen Transformationen die Linienelemente der Ebenen $x_2 =$ Const. 6- oder 7-gliedrig vertauscht werden, so können wir diese Untergruppe offenbar in der Form I. resp. II. des vorhergehenden Paragraphen annehmen, denn diese Formen werden aus den allgemeinen Formen derartiger Gruppen dadurch gewonnen, dass man gewisse Berührungstransformationen ausführt (vgl. im vorigen Paragraphen die Formeln (4), (5), (6) und (9)), *bei denen stets x_2 selbst ungeändert bleibt.* (Wäre bei denselben auch x_2 transformiert worden, so dürften wir die Untergruppen nicht ohne weiteres in der Form I. oder II. wählen.) Zu diesen Untergruppen treten dann noch 1, 2 resp. 3 Transformationen hinzu, welche die Ebenen $x_2 =$ Const. unter einander vertauschen und die wir früher (pag. 123) durch $C_1 f$, $C_2 f$, $C_3 f$ bezeichnet haben.

Bei $C_1 f$ erhält x_2 das Increment ∂t, bei $C_2 f$ das Increment $x_2 \partial t$ und bei $C_3 f$ das Increment $x_2^2 \partial t$. Wenn wir aber unter W_1, W_2, W_3 die zu $C_1 f$, $C_2 f$, $C_3 f$ gehörigen characteristischen Functionen verstehen, so hat x_2 bei diesen drei Transformationen nach den Formeln (3') der Einleitung die respectiven Incremente

$$\frac{\partial W_1}{\partial y_2} \partial t, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial y_2} \partial t, \qquad \frac{\partial W_3}{\partial y_2} \partial t.$$

Mithin ist

$$\frac{\partial W_1}{\partial y_2} \equiv 1, \qquad \frac{\partial W_2}{\partial y_2} \equiv x_2, \qquad \frac{\partial W_3}{\partial y_2} \equiv x_2^2$$

und W_1, W_2, W_3 haben somit die Formen:

$$(1) \qquad W_m \equiv x_2^{m-1} y_2 + \Phi_m(x_1, x_2, y_1, z). \qquad (m=1,2,3)$$

Die Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 müssen wir nun im folgenden durch die Forderung einschränken, dass C_1f, C_2f, C_3f mit den Transformationen Af der Gruppe I. resp. II. wieder Gruppen bilden müssen, sodass I. resp. II. in diesen Gruppen die Rolle invarianter Untergruppen spielen. *Es muss also jedes (A_kf, C_mf) sich durch die Transformationen Af von I. resp. II. allein linear mit constanten Coefficienten ausdrücken.* Dies gilt stets, ob nun nur C_1f oder ausserdem C_2f oder schliesslich alle drei Cf zu den Transformationen I. resp. II. hinzutreten. Wenn aber (A_kf, C_mf) sich durch die Af allein ausdrücken soll, so muss dasselbe für die Combination der zugehörigen characteristischen Functionen gelten. Daher berechnen wir im folgenden die Combinationen der W_1, W_2, W_3 mit den characteristischen Functionen der Typen I. und II. in Gemässheit der Formel (5') der Einleitung.

Es kommt nach (1):

$$(2) \begin{cases} 1. & \{x_1^2, W_m\} \equiv -2x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} - x_1^2 \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 2. & \{x_1 y_1, W_m\} \equiv x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1}, \\ 3. & \{y_1^2, W_m\} \equiv 2y_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} + y_1^2 \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 4. & \{A_i x_1, W_m\} \equiv -A_i \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} - A_i' x_1 x_2^{m-1} - A_i x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 5. & \{A_i y_1, W_m\} \equiv A_i \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} - A_i' y_1 x_2^{m-1}, \\ 6. & \{B_k, W_m\} \equiv -B_k' x_2^{m-1} - B_k \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \\ 7. & \{x_1 y_1 - 2z, W_m\} \equiv x_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1} + 2z \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} - 2\Phi_m. \end{cases}$$

Um uns bequemer ausdrücken zu können, wollen wir den Fall, in welchem die Linienelemente der Ebene $x_2 = \text{Const.}$ bei festgehaltenen Ebenen vermöge I. transformiert werden, *den Fall* G_6, den, in welchem sie vermöge II. transformiert werden, *den Fall* G_7 nennen.

Nach dem obengesagten müssen sich nun im Falle G_6 die Functionen $(2)_1, (2)_2, \ldots, (2)_6$ durch die in I. vorkommenden, im Falle G_7

die Functionen $(2)_1, (2)_2, \ldots, (2)_7$ durch die in II. vorkommenden characteristischen Functionen linear mit constanten Coefficienten ausdrücken. In beiden Fällen müssen also die Functionen $(2)_1, \ldots, (2)_6$ jedenfalls linear in z sein und zwar muss z einen constanten Coefficienten haben (der im Falle G_6 sogar gleich Null anzunehmen ist). $(2)_5$, $(2)_6$ und $(2)_4$ lehren also, dass

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial y_1}$$

sämtlich nur linear in z sein können (denn die A_i und B_k in I. oder II. sind nicht sämtlich $\equiv 0$). Φ_m hat daher die Form:

$$\Phi_m = \chi_m(x_2)z^2 + \psi_m(x_1, x_2, y_1)z + \varphi_m(x_1, x_2, y_1), \qquad (m=1,2,3) \tag{3}$$

wo χ_m nur von x_2 abhängt.

Aber noch mehr! Infolge von (3) kommen in den Functionen $(2)_1, \ldots, (2)_6$ folgende Coefficienten von z vor:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1. & -2x_1\dfrac{\partial\psi_m}{\partial y_1} - 2x_1^2\chi_m, \\ 2. & x_1\dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1} - y_1\dfrac{\partial\psi_m}{\partial y_1}, \\ 3. & 2y_1\dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1} + 2y_1^2\chi_m, \\ 4. & -A_i\dfrac{\partial\psi_m}{\partial y_1} - 2A_ix_1\chi_m, \\ 5. & A_i\dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1}, \\ 6. & -2B_k\chi_m. \end{array} \right.$$

Sie müssen constant sein. Nach $(4)_4$ und $(4)_5$ ist also:

$$A_i\left(x_1\frac{\partial\psi_m}{\partial x_1} - y_1\frac{\partial\psi_m}{\partial y_1}\right) - 2A_ix_1y_1\chi_m \equiv x_1\,\text{Const.} + y_1\,\text{Const.},$$

daher nach $(4)_2$ auch:

$$A_i.\text{Const.} - 2A_ix_1y_1\chi_m \equiv x_1\,\text{Const.} + y_1\,\text{Const.},$$

was, da A_i nur von x_2 abhängt, nicht anders möglich ist, als dass sämtliche Summanden einzeln gleich Null sind. Wir erhalten dadurch

(5) $$\chi_m \equiv 0,$$

und ausserdem muss $(4)_2$ gleich Null sein, d. h. es ist

(6) $$\psi_m \equiv \psi_m(x_1 y_1, x_2).$$

$(4)_1$ und $(4)_3$ werden nunmehr zu

$$-2x_1^2 \frac{\partial \psi_m}{\partial(x_1 y_1)}, \qquad 2y_1^2 \frac{\partial \psi_m}{\partial(x_1 y_1)}.$$

Dies aber sind nur dann Constanten, wenn ψ_m frei von $x_1 y_1$ ist.

Somit ergiebt sich nach (3), (5) und (6):

$$\Phi_m \equiv \psi_m(x_2) z + \varphi_m(x_1, x_2, y_1). \qquad {\scriptstyle (m=1,2,3)}$$

Es ist aber für die folgenden Betrachtungen bequemer, Φ_m in dieser Form zu schreiben

(7) $$\Phi_m \equiv -\frac{1}{2}\psi_m(x_2).(x_1 y_1 - 2z) + \omega_m(x_1, x_2, y_1), \qquad {\scriptstyle (m=1,2,3)}$$

wo ψ_m eine Function von x_2 allein bedeutet. Diese Form stimmt im wesentlichen mit der vorhergehenden überein.

Wenn wir diesen Wert (7) in die Formeln (2) einführen, so ergiebt sich, dass

$$\{x_1^2, W_m\} \equiv \{x_1^2, \omega_m\} \equiv S_1,$$

$$\{x_1 y_1, W_m\} \equiv \{x_1 y_1, \omega_m\} \equiv S_2,$$

$$\{y_1^2, W_m\} \equiv \{y_1^2, \omega_m\} \equiv S_3,$$

$$\{A_i x_1, W_m\} \equiv \{A_i x_1, \omega_m\} - A_i' x_1 x_2^{m-1} - \frac{1}{2} A_i \psi_m x_1 \equiv S_4,$$

$$\{A_i y_1, W_m\} \equiv \{A_i y_1, \omega_m\} - A_i' y_1 x_2^{m-1} - \frac{1}{2} A_i \psi_m y_1 \equiv S_5,$$

$$\{B_k, W_m\} \equiv \{B_k, \omega_m\} - B_k' x_2^{m-1} - B_k \psi_m \equiv S_6,$$

$$\{x_1 y_1 - 2z, W_m\} \equiv \{x_1 y_1 - 2z, \omega_m\} \equiv S_7.$$

Die rechten Seiten $S_1, \ldots, S_6$ resp. $S_1, \ldots, S_7$ müssen sich, wie wir wissen, als characteristische Functionen des Typus I. resp. II. darstellen.

Wir bilden nun:

$$\frac{2}{x_1} S_4 + \frac{2}{y_1} S_5 \equiv A_i \left(\frac{2}{y_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial y_1} \right) - 4 A_i' x_2^{m-1} - 2 A_i \psi_m$$

und

$$\frac{1}{x_1^2} S_1 + \frac{1}{y_1^2} S_3 \equiv \frac{2}{y_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1} \frac{\partial \omega_m}{\partial y_1},$$

Relationen, von deren Richtigkeit man sich durch Ausrechnung überzeuge. Hieraus folgt:

$$\frac{2}{x_1} S_4 + \frac{2}{y_1} S_5 \equiv A_i \left(\frac{1}{x_1^2} S_1 + \frac{1}{y_1^2} S_3 \right) - 4 A_i' x_2^{m-1} - 2 A_i \psi_m .$$

Die S besitzen, da sie characteristische Functionen von I. resp. II. sein müssen, sämtlich die Form:

$$\text{Const.}\, x_1^2 + \text{Const.}\, x_1 y_1 + \text{Const.}\, y_1^2$$

$$+ \Sigma\, \text{Const.}\, A x_1 + \Sigma\, \text{Const.}\, A y_1 + \Sigma\, \text{Const.}\, B + \text{Const.} (x_1 y_1 - 2z).$$

Wenn wir also in unserer letzten Identität die von x_1, y_1, z freien Glieder links und rechts vergleichen, so ergiebt sich:

$$\Sigma\, \text{Const.}\, A \equiv \text{Const.}\, A_i - 4 A_i' x_2^{m-1} - 2 A_i \psi_m ,$$

d. h.:

(8) $$2 A_i' x_2^{m-1} + A_i \psi_m \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, A .$$

Daraus folgt nach den obigen Werten von S_4 und S_5, dass ebenso wie S_4 und S_5 selbst auch $\{A_i x_1, \omega_m\}$ und $\{A_i y_1, \omega_m\}$ characteristische Functionen des Typus I. resp. II. sein müssen. Weil ferner in S_6

$$\{B_k, \omega_m\} \equiv 0$$

ist, da B_k und ω_m blosse Functionen von x_2 resp. x_1, x_2, y_1 sind, so ergiebt sich, da S_6 auch characteristische Function von I. resp. II. sein muss:

(9) $$B_k' x_2^{m-1} + B_k \psi_m \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, B .$$

Unsere Betrachtungen lehren also, dass die Combinationen der characteristischen Functionen von I. resp. II. mit ω_m allein (statt mit W_m) wieder characteristische Functionen von I. resp. II. sein müssen, d. h. *dass die*

Gruppe I. resp. II. mit der zu ω_m gehörigen infinitesimalen Berührungstransformation eine Gruppe erzeugt, welche die Gruppe I. resp. II. zur invarianten Untergruppe hat. Diese (grössere) Gruppe muss nun wieder eine der typischen Formen I. resp. II. haben, d. h. ω_m hat die Form:

$$\omega_m \equiv a x_1^2 + b x_1 y_1 + c y_1^2 + D x_1 + E y_1 + F + g(x_1 y_1 - 2z),$$

wo a, b, c, g Constanten sind (von denen im Falle G_6 $g = 0$ ist) und D, E, F Functionen von x_2 bedeuten.

In der characteristischen Function(1), welche jetzt die Form hat

$$W_m \equiv x_2^{m-1} y_2 - \frac{1}{2}\varphi_m(x_1 y_1 - 2z) + \omega_m,$$

können nun aber offenbar die Glieder gestrichen werden, welche für sich genommen characteristische Functionen von I. resp. II. sind. Mithin dürfen wir setzen

$$\omega_m \equiv D x_1 + E y_1 + F.$$

Gerade so wie pag. 141 ergiebt sich hier weiter, dass Dx_1, Ex_1, Dy_1, Ey_1 characteristische Functionen von I. resp. II. sein müssen und also $D \equiv E \equiv 0$ gesetzt werden kann. ω_m reduciert sich also schliesslich auf eine blosse Function von x_2.

Im Falle G_7 muss übrigens wegen

$$\{x_1 y_1 - 2z, \omega_m\} \equiv -2\omega_m$$

ω_m characteristische Function von II. sein, d. h. dann darf $\omega_m \equiv 0$ gesetzt werden.

Die Formeln (8), (9) und nach (1) und (7):

$$(10) \qquad W_m \equiv x_2^{m-1} y_2 - \frac{1}{2}\varphi_m(x_2)(x_1 y_1 - 2z) + \omega_m(x_2),$$

wo im Fall G_7 $\omega_m \equiv 0$ ist, stellen das Resultat unserer Betrachtungen dar.

Wenn wir nunmehr vermöge der endlichen Berührungstransformation

$$x_1 = \rho(x_2')x_1', \qquad y_1 = \rho y_1',$$
$$x_2 = x_2', \qquad y_2 = \rho^2 y_2' - \rho\rho'(x_1' y_1' - 2z') + \sigma'(x_2'),$$
$$z = \rho^2 z' + \sigma(x_2'),$$

wo

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = \rho^2 (dz' - y_1' dx_1' - y_2' dx_2')$$

ist und im Falle G_7 $\sigma(x_2) \equiv 0$ angenommen werden soll, neue Variabeln in Gemässheit der unter C. in der Einleitung gemachten Bemerkungen einführen, so ändern sich die Typen I. und II. nicht wesentlich. Wohl aber ist W_m zu ersetzen durch:

$$\frac{1}{\rho^2}\left(x_2^{m-1} y_2 - \frac{1}{2}\psi_m \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega_m\right) = \frac{x_2'^{\,m-1}}{\rho^2}[\rho^2 y_2' - \rho\rho'(x_1' y_1' - 2z') + \sigma']$$
$$- \frac{1}{2}\psi_m \cdot (x_1' y_1' - 2z') + \frac{1}{\rho^2}\omega_m + \frac{1}{\rho^2}\psi_m \sigma.$$

Wählen wir also $\rho(x_2')$ und $\sigma(x_2')$ so, dass:

$$-\frac{\rho'(x_2')}{\rho(x_2')} - \frac{1}{2}\psi_1 \equiv 0, \qquad \sigma'(x_2') + \omega_1(x_2') + \sigma(x_2')\psi_1 \equiv 0$$

wird, was immer möglich ist, ohne dass $\rho \equiv 0$ zu werden braucht, so folgt, dass W_1 die einfache Form annimmt:

(11) $$W_1 \equiv y_2,$$

wenn nämlich in den neuen Variabelnbezeichnungen die unnötigen Accente weggelassen werden (und zwar gilt dies auch im Fall G_7, denn dann ist ja $\omega_1 \equiv \sigma \equiv 0$ zu nehmen).

W_2 und W_3 ändern ihre Form nicht wesentlich bei Einführung jener neuen Variabeln.

Wir erledigen nun nach einander die 3 Fälle, wo 1) nur W_1, 2) auch W_2, 3) alle drei W zu den characteristischen Functionen I. resp. II. hinzutreten. Zu bemerken ist, dass die obigen Formeln für alle drei Fälle gelten. Auch ist klar, dass mit (8), (9) und (10) alle Bedingungen, welche aus der Forderung der Gruppeneigenschaft fliessen, erschöpft sind, ausgenommen die aus den Combinationen der W unter einander folgenden.

Erster Fall: $m = 1$.

Hier tritt zu I. resp. II. nur hinzu nach (11):

$$W_1 \equiv y_2$$

und (8) und (9) liefern für $m = 1$:

$$2A_i' \equiv \sum \text{Const.}\, A, \qquad B_k' \equiv \sum \text{Const.}\, B.$$

Diese Gleichungen lehren, dass die A die Formen haben:

$$x_2^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2} \qquad (\sigma_i = 0, 1, \ldots, s_i, \quad \alpha_i = \text{Const.}, \quad i = 1, 2, \ldots, s)$$

und die B die Formen:

$$x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2} \qquad (\tau_k = 0, 1, \ldots, t_k, \quad \beta_k = \text{Const.}, \quad k = 1, 2, \ldots, t),$$

aber natürlich derart, dass immer, wie in Typus I. und II. verlangt wird, das Product zweier A ein B ist.

Berücksichtigen wir dies, so können wir schliesslich im vorliegenden Falle folgende beiden Typen angeben:

III.

$$x_1^2, \quad x_1 y_1, \quad y_1^2,$$
$$x_2^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2} x_1, \; x_2^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2} y_1, \; x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2},$$
$$y_2,$$
$$\sigma_i = 0, 1, 2, \ldots, s_i, \quad \alpha_i = \text{Const.}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$
$$\tau_k = 0, 1, 2, \ldots, t_k, \quad \beta_k = \text{Const.}, \quad k = 1, 2, \ldots, t,$$

sodass jedes $x_2^{\sigma_i + \sigma_j} e^{(\alpha_i + \alpha_j) x_2}$ die Form $\sum \text{Const.}\, x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}$ hat.

und:

IV.

Dieselben characteristischen Functionen wie bei III. und ausserdem noch

$$x_1 y_1 - 2z.$$

Zweiter Fall: $m = 1, 2$.

In diesem Falle tritt zu III. resp. IV. nach (10) noch hinzu:

$$W_2 \equiv x_2 y_2 - \frac{1}{2}\phi_2 \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega_2.$$

Weil:

$$\{W_1, W_2\} \equiv \{y_2, W_2\} \equiv \frac{\partial W_2}{\partial x_2} \equiv -\frac{1}{2}\psi_2' \cdot (x_1 y_1 - 2z) + \omega_2'$$

ist, so muss die rechte Seite eine characteristische Function des Typus I. resp. II. sein.

Im Falle G_6 ist daher $\psi_2' \equiv 0$, im Fall G_7 $\psi_2' \equiv \text{Const.}$, in beiden also

$$\psi_2 \equiv -2ax_2 - 2b$$

zu setzen, wo a und b Constanten bedeuten, derart dass im Fall G_6 $a = 0$ gesetzt werden muss und im Fall G_7 $b = 0$ gesetzt werden darf (da dann $x_1 y_1 - 2z$ in der Gruppe selbständig auftritt).

(8) und (9) ergeben für $m = 2$:

$$2A_i' x_2 + A_i(-2ax_2 - 2b) \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, A,$$

$$B_k' x_2 + B_k(-2ax_2 - 2b) \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, B.$$

Da für

$$A_i \equiv x_2^{\sigma_i} e^{\alpha_i x_2}, \qquad B_k \equiv x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}$$

die Relationen bestehen:

$$A_i' x_2 \equiv \sigma_i A_i + \alpha_i x_2 A_i,$$

$$B_k' x_2 \equiv \tau_k B_k + \beta_k x_2 B_k,$$

so können wir dafür schreiben:

$$(2\sigma_i + 2\alpha_i x_2 - 2ax_2 - 2b) A_i \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, A,$$

$$(\tau_k + \beta_k x_2 - 2ax_2 - 2b) B_k \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, B,$$

d. h.:

$$(2\alpha_i - 2a) x_2 A_i \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, A, \qquad (\beta_k - 2a) x_2 B_k \equiv \Sigma\, \text{Const.}\, B.$$

Wenn somit $2\alpha_i - 2a$ nicht für jedes α_i gleich Null ist, so ist mit A_i auch stets $x_2 A_i$ eines aus der Reihe der A. Da jedoch die gesuchten Gruppen endlich sein sollen, so darf dies nicht sein, d. h. es ist

$$2\alpha_i - 2a = 0.$$

Ebenso folgt:

$$\beta_k - 2a = 0,$$

d. h.:

$$\alpha_i = a, \qquad \beta_k = 2a.$$

Da also nur ein $\alpha_i = a$ und ein $\beta_k = 2a$ vorkommt, so sind die A resp. B die Functionen:

$$e^{ax_2},\ x_2 e^{ax_2},\ \ldots,\ x_2^s e^{ax_2}$$

resp.

$$e^{2ax_2},\ x_2 e^{2ax_2},\ \ldots,\ x_2^t e^{2ax_2},$$

wo, da jedes Product zweier A sich durch die B ausdrücken lassen muss, notgedrungen

$$t \geqq 2s$$

ist.

Ferner wird jetzt:

$$W_2 \equiv x_2 y_2 + (ax_2 + b)(x_1 y_1 - 2z) + \omega_2,$$

wo ω_2', wie die obige Combination $\{W_1 W_2\}$ lehrte, characteristische Function des Typus I. resp. II. sein muss.

Im Falle G_6 ist aber, wie gesagt, $a = 0$ und also ω_2' von der Form:

$$\omega_2' \equiv \sum_0^t{}_\tau \text{Const.}\, x_2^\tau,$$

sodass

$$\omega_2 \equiv \sum_0^{t+1}{}_\tau \text{Const.}\, x_2^\tau$$

wird. Da aber $1, x_2, x_2^2, \ldots, x_2^t$ selbst characteristische Functionen sind, so dürfen wir einfach

$$\omega_2 \equiv c x_2^{t+1} \qquad (c = \text{Const.})$$

setzen, sodass sich der Typus ergiebt:

V.

$$x_1^2,\quad x_1 y_1,\quad y_1^2,$$
$$x_1,\quad x_2 x_1,\quad x_2^2 x_1,\quad \ldots,\quad x_2^s x_1,$$
$$y_1,\quad x_2 y_1,\quad x_2^2 y_1,\quad \ldots,\quad x_2^s y_1,$$
$$1,\quad x_2,\quad x_2^2,\quad \ldots,\quad x_2^t:$$
$$y_2,$$
$$x_2 y_2 + b(x_1 y_1 - 2z) + c x_2^{t+1}.$$
$$t \geqq 2s.$$

Im Falle G_7 dagegen lässt sich $b = 0$ machen, auch ist dann nach dem früheren (siehe S. 148) $\omega_2 \equiv 0$ zu setzen. Also wird dann

$$W_2 \equiv x_2 y_2 + a x_2 (x_1 y_1 - 2z).$$

Führen wir neue Variabeln vermöge der Berührungstransformation

$$(12) \qquad \begin{cases} x_1 = e^{ax'_2} x'_1, & x_2 = x'_2, \quad z = e^{2ax'_2} z', \\ y_1 = e^{ax'_2} y'_1, & y_2 = e^{2ax'_2} y'_2 - a e^{2ax'_2}(x'_1 y'_1 - 2z') \end{cases}$$

ein, so bleiben $x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_1 y_1 - 2z$ als characteristische Functionen bis auf andere Variabelnbezeichnung ungeändert, während die

$$x_2^\sigma e^{ax_2} x_1, \quad x_2^\sigma e^{ax_2} y_1, \quad x_2^\tau e^{2ax_2}$$

resp. übergehen in

$$x_2'^\sigma x'_1, \quad x_2'^\sigma y'_1, \quad x_2'^\tau.$$

Anstelle von W_1 tritt

$$y'_2 - a(x'_1 y'_1 - 2z'),$$

anstelle von W_2:

$$x'_2 y'_2.$$

Da $x'_1 y'_1 - 2z'$ in der transformierten Gruppe selbständig auftritt, so können wir in dem neuen W_1 $a = 0$ setzen und es folgt der Typus:

$$\text{VI.} \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_1^2, \quad x_1 y_1, \quad y_1^2, \\ x_1, \quad x_2 x_1, \quad x_2^2 x_1, \quad \ldots, \quad x_2^s x_1, \\ y_1, \quad x_2 y_1, \quad x_2^2 y_1, \quad \ldots, \quad x_2^s y_1, \\ 1, \quad x_2, \quad x_2^2, \quad \ldots, \quad x_2^t, \\ y_2, \quad x_2 y_2, \\ x_1 y_1 - 2z. \\ (t \geqq 2s). \end{array}}$$

Dritter Fall: $m = 1, 2, 3.$

Hier tritt zum Typus V. resp. VI. noch hinzu

$$W_3 \equiv x_2^2 y_2 - \frac{1}{2}\psi_3 . (x_1 y_1 - 2z) + \omega_3 .$$

Es ist nämlich zu beachten, dass die Einführung neuer Variabeln vermöge (12) die Form von W_3 nicht wesentlich geändert hat. (8) und (9) ergeben nunmehr für $m = 3$:

(13) $$2A_i' x_2^2 + A_i \psi_3 \equiv \Sigma \,\text{Const.}\, A,$$

(14) $$B_k' x_2^2 + B_k \psi_3 \equiv \Sigma \,\text{Const.}\, B.$$

Für das specielle $A_i = 1$ kommt sofort:

$$\psi_3 \equiv \Sigma \,\text{Const.}\, A \equiv \sum_0^s {}_\sigma c_\sigma x_2^\sigma.$$

In (13) eingesetzt giebt dies für das letzte $A_i = x_2^s$:

$$2 s x_2^{s+1} + x_2^s \sum_0^s {}_\sigma c_\sigma x_2^\sigma \equiv \sum_0^s {}_\sigma \text{Const.}\, x_2^\sigma,$$

d. h. es ist

$$2s + c_1 = 0, \qquad c_2 = c_3 = \dots = c_s = 0,$$

also:

$$\psi_3 \equiv c_0 - 2 s x_2.$$

In (14) eingesetzt folgt für $B_k = x_2^t$:

$$t x_2^{t+1} + x_2^t (c_0 - 2 s x_2) = \sum_0^t {}_\tau \text{Const.}\, x_2^\tau,$$

d. h.:

$$t = 2s.$$

Im übrigen werden jetzt offenbar alle Relationen (13) und (14) erfüllt.

Wir combinieren nun:

(15) $$\{W_1, W_3\} \cdot \{y_2, W_3\} \equiv \frac{\partial W_3}{\partial x_2} \equiv 2 x_2 y_2 + s(x_1 y_1 - 2z) + \omega_3'.$$

Im Falle G_6 muss dies characteristische Function von Typus V. sein, d. h. dann muss

$$(s - 2b)(x_1 y_1 - 2z) + \omega_3' - 2 c x_2^{t+1}$$

characteristische Function vom Typus I. sein. Folglich haben wir:

(16) $$s = 2b; \qquad \omega_3' - 2 c x_2^{2s+1} = \sum_0^{2s} {}_\tau \gamma_\tau x_2^\tau, \qquad (\gamma_\tau = \text{Const.}).$$

Wir bilden noch in diesem Falle G_6:

$$\{W_2 W_3\} \equiv -x_2^2 y_2 - c(t+1)x_2^{t+2} + sx_2(x_1 y_1 - 2z) + x_2\omega_3' + 2c\left(sx_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x_2^{t+1} - 2b\omega_3$$

$$\equiv -W_3 + \left(2sx_2 - \frac{1}{2}c_0\right)(x_1 y_1 - 2z) + 2\omega_3 - c(t+1)x_2^{t+2} + x_2\omega_3' + 2c\left(sx_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x_2^{t+1} - 2b\omega_3.$$

Die rechte Seite mit Ausnahme von W_3 muss characteristische Function von (1) sein, d. h. es ist zunächst:

$$2sx_2 - \frac{1}{2}c_0 \equiv 0,$$

daher $s = c_0 = 0$, also nach (16) $b = 0$; wegen $t = 2s = 0$ ferner:

$$\omega_3' - 2cx_2 = \gamma_0,$$

$$\omega_3 = cx_2^2 + \gamma_0 x_2 + d. \qquad (d = \text{Const.})$$

Eingesetzt folgt, dass

$$2cx_2^2 + 2\gamma_0 x_2 + 2d - cx_2^2 + 2cx_2^2 + \gamma_0 x_2$$

characteristische Function sein muss, d. h. es ist:

$$c = \gamma_0 = 0$$

und folglich lautet der Typus im Fall G_6, da in ω_3 die Constante d gestrichen werden darf:

VII.

x_1^2,	$x_1 y_1$,	y_1^2,
x_1,	y_1,	1,
y_2,	$x_2 y_2$,	$x_2^2 y_2$.

Im Fall G_7 endlich ist $\omega_3 \equiv 0$, also auch (15) wirklich eine characteristische Function vom Typus VI. Wir haben dann noch zu combinieren, indem wir c_0 wegen $x_1 y_1 - 2z$ streichen dürfen:

$$\{W_2, W_3\} \equiv \{x_2 y_2, x_2^2 y_2 + sx_2(x_1 y_1 - 2z)\} = -W_3 + 2sx_2(x_1 y_1 - 2z),$$

d. h. es ist

$$s = 0 \quad \text{und daher} \quad t = 2s = 0,$$

sodass $\psi_3 \equiv 0$ wird. Der Typus lautet folglich:

VIII.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x_1^2, & x_1 y_1, & y_1^2, \\ x_1, & y_1, & 1, \\ y_2, & x_2 y_2, & x_2^2 y_2, \\ & x_1 y_1 - 2z. & \end{array}}$$

Hiermit sind nun *alle* Typen aufgestellt worden, bei denen die Linienelemente der Ebenen $x_2 =$ Const., wenn diese festgehalten werden, 6- oder 7-gliedrig transformiert werden.

Die Frage, ob die Gruppen III. bis VIII. nun auch wirklich *irreducibel* sind, ist noch nicht entschieden. Doch ist soviel klar, dass alle unsere Typen irreducibel sein müssen, sobald es jede Gruppe vom Typus I. ist. Dies allein bliebe also noch nachzuweisen, denn alle Gruppen II. bis VIII. enthalten Untergruppen von der Form I. Den Beweis verschieben wir auf später.

§ 3. *Die Gruppen $A_k f$, welche die Linienelemente der Ebenen $x_2 =$ Const. zehngliedrig transformieren, und die zugehörigen Gruppen von der Form $A_k f$, $C_i f$.*

Es mögen in allem folgenden $W_1, \ldots, W_{10}$ die characteristischen Functionen derjenigen infinitesimalen Transformationen bedeuten, welche die irreducibele 10-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene (x_1, z, y_1) erzeugen (siehe pag. 129). Es sei also

$$W_1 \equiv 1, \quad W_2 \equiv x_1, \quad W_3 \equiv y_1, \quad W_4 \equiv x_1^2, \quad W_5 \equiv x_1 y_1, \quad W_6 \equiv y_1^2,$$

$$W_7 \equiv x_1 y_1 - 2z,$$

$$W_8 \equiv x_1(x_1 y_1 - 2z), \qquad W_9 \equiv y_1(x_1 y_1 - 2z),$$

$$W_{10} \equiv (x_1 y_1 - 2z)^2.$$

Alsdann hat die *allgemeine infinitesimale Transformation* derjenigen Gruppe, die wir jetzt aufsuchen, eine characteristische Function von der Form

$$\Omega_k \equiv \sum_1^{10} {}_i \, \omega_{ki}(x_2) W_i, \qquad (k=1,2,\ldots,r)$$

wo die ω_{ki} Functionen von x_2 allein bezeichnen. Es geht dies unmittelbar aus den ersten Betrachtungen des § 1 hervor. Die gesuchte Gruppe sei r-gliedrig, sodass $r \geqq 10$ ist, weil sonst die gesuchte Gruppe in der Ebene $x_2 = \text{Const.}$ die Linienelemente weniger als 10-gliedrig transformiert. (Vgl. in der Einleitung unter E.)

Da die Gruppe der (Ω) also die Linienelemente der Ebene allgemeiner Lage $x_2 = \text{Const.}$ gerade 10-gliedrig transformiert, so giebt es gerade $(r - 10)$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe, welche alle Linienebene einer bestimmt gewählten Ebene allgemeiner Lage $x_2 = x_2^0$ einzeln stehen lassen. Es giebt also unter den Ω $(r - 10)$ characteristische Functionen — die wir durch $\Phi_1, \ldots, \Phi_{r-10}$ bezeichnen wollen —, deren zugehörige Transformationen die Linienelemente der Ebene $x_2 = x_2^0$ sämtlich invariant lassen.

Ist r gerade gleich 10, so bleiben die Linienelemente in allen Ebenen $x_2 = \text{Const.}$ fest, sobald sie in einer Ebene $x_2 = \text{Const.}$ festgehalten werden.

Ist dagegen $r > 10$, so erzeugen die zu $\Phi_1, \ldots, \Phi_{r-10}$ gehörigen infinitesimalen Berührungstransformationen *eine* $(r - 10)$*-gliedrige Untergruppe der gesuchten Gruppe.* Wir behaupten nun, dass diese Untergruppe in der ganzen Gruppe *invariant* ist. In der That, wenn wir auf eine Berührungstransformation (Φ), welche alle Linienelemente der Ebene $x_2 = x_2^0$ stehen lässt, eine andere Berührungstransformation (Ω) der ganzen Gruppe ausführen, welche sie unter sich transformiert, so ergiebt sich selbstverständlich wiederum eine Berührungstransformation, welche alle Linienelemente der Ebene $x_2 = x_2^0$ einzeln invariant lässt.

Wenn wir nun die zu der invarianten Untergruppe (Φ) der Gruppe (Ω) gehörige *verkürzte Gruppe* betrachten, vermöge deren bei jener die Linienelemente einer der Ebene $x_2 = x_2^0$ benachbarten Ebene $x_2 = x_2'$ unter einander vertauscht werden, so ist klar, dass diese verkürzte Gruppe sich auf eine invariante Untergruppe der Gruppe der (W) oder auf diese Gruppe selbst reducieren muss. Es kann nur letzteres eintreten, *da nämlich die Gruppe der* (W) *keine invariante Untergruppe — ausser eben sich*

selbst — besitzt. Mithin folgt umgekehrt, dass die Functionen Φ sich aus *allen zehn* Functionen W zusammensetzen:

$$\Phi_k = \sum_1^{10} {}_i \varphi_{ki}(x_2) W_i \qquad (k=1,2,\ldots,r-10)$$

und zwar so, dass diese $(r-10)$ Functionen sich für $x_2 = \text{Const.}$ auf *nicht weniger als* 10 von einander unabhängige Functionen reducieren. Es muss also $r - 10$ mindestens gleich 10 sein, sobald, wie wir annahmen, $r > 10$ ist.

Die von den $(r-10)$ unabhängigen infinitesimalen Berührungstransformationen (Φ) erzeugte Gruppe transformiert nun die Linienelemente der der Ebene $x_2 = x_2^0$ benachbarten Ebene allgemeiner Lage $x_2 = x_2'$ gerade 10-gliedrig. Es giebt mithin gerade $(r-20)$ unabhängige infinitesimale Transformationen dieser Gruppe, welche alle Linienelemente dieser Ebene $x_2 = x_2'$ stehen lassen. Es seien dies die Transformationen $(\Psi_1), \ldots, (\Psi_{r-20})$.

Die von $(\Psi_1), \ldots, (\Psi_{r-20})$ erzeugte $(r-20)$*-gliedrige Gruppe* (die sich, wenn r gerade gleich 20 ist, auf die Identität reduciert) ist nun wieder eine *invariante Untergruppe der* $(r-10)$*-gliedrigen Gruppe* $(\Phi_1), \ldots, (\Phi_{r-10})$. Man kann auch zeigen, dass sie eine invariante Untergruppe der *ganzen* r-gliedrigen Gruppe $(\Omega_1), \ldots, (\Omega_r)$ ist.

Begrifflich ist dies sofort einzusehen, was darin liegt, dass die Gruppe $(\Psi_1), \ldots, (\Psi_{r-20})$ auch so gewonnen werden kann, dass zunächst die Linienelemente der Ebene $x_2 = x_2'$, dann erst die der Ebene $x_2 = x_2^0$ festgehalten werden. Es seien nämlich $X_1, \ldots, X_{r-10}$ die characteristischen Functionen der $(r-10)$ unabhängigen infinitesimalen Transformationen der ganzen Gruppe, bei denen alles in der Ebene $x_2 = x_2'$ fest bleibt. Die Gruppe (Ψ) ist alsdann invariante Untergruppe sowohl der Gruppe (Φ) als auch der Gruppe (X), welche beide wieder invariante Untergruppen der Gruppe (Ω) sind. Einerseits hat also jedes $\{\Omega\Psi\}$ die Form $\sum \text{Const.}\, \Phi$, andererseits die Form $\sum \text{Const.}\, X$. Beide Formen aber können eben nur dann übereinstimmen, wenn sie gleich $\sum \text{Const.}\, \Psi$ sind, denn die (Ψ) sind die einzigen den Gruppen (Φ) und (X) gemeinsamen infinitesimalen Transformationen.

Genau so wie oben bei der Gruppe (Φ) erkennen wir nun auch, dass sich die characteristischen Functionen der Gruppe (Ψ), wenn in ihnen für x_2 eine Constante gesetzt wird, *auf gerade* 10 *unabhängige* Functionen — auf die W — reducieren etc.

Somit ergiebt sich folgendes Resultat:

Entweder ist $r = 10$ oder nicht.

Im letzteren Falle ist $r > 10$ und zwar $= 20$ oder > 20. Im letzteren Falle wiederum ist $r = 30$ oder $r > 30$ etc. Schliesslich folgt, *dass r ein ganzes Vielfaches von* 10 *ist.* Alsdann existiert eine 10-gliedrige Gruppe, die in einer 20-gliedrigen, mit dieser zusammen in einer 30-gliedrigen etc. invariant ist. Die 10-gliedrige Gruppe hat die Beschaffenheit, dass ihre characteristischen Functionen sich für $x_2 =$ Const. auf $W_1, W_2, \ldots, W_{10}$ reducieren.

Im folgenden werden wir naturgemäss zunächst diese 10-*gliedrige Gruppe zu bestimmen suchen.* Alsdann haben wir weitere 10 infinitesimale Transformationen hinzuzufügen, sodass die 10-gliedrige Gruppe in der so entstehenden 20-gliedrigen als invariante Untergruppe enthalten ist, etc.

Unser *Problem* ist jetzt also das folgende:

Es sind 10 *characteristische Functionen gegeben von der allgemeinen Form:*

$$\Omega_k \equiv \sum_{1}^{10}{}_i\, \omega_{ki}(x_2) W_i, \qquad (k=1,2,\ldots,10)$$

wo die W obige characteristische Functionen der irreducibelen zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene (x_1, z, y_1) sind. Diese 10 *Functionen Ω_k sollen linear unabhängig von einander bleiben, wenn in ihnen für x_2 eine nicht gerade ganz speciell gewählte Constante gesetzt wird. Man soll die Functionen $\omega_{ki}(x_2)$ so bestimmen, dass die Ω_k die characteristischen Functionen einer Gruppe von Berührungstransformationen des R_3 bilden.*

Nach Lie lässt sich dieses Problem verhältnismässig einfach erledigen, wenn man von einem gewissen *allgemeinen Satze* der Gruppentheorie Gebrauch macht. Doch bedarf es dazu der folgenden *Vorbemerkungen:*

Interpretiert man in der in der Einleitung unter F. schon bemerkten Art x_1, z, y_1 als Punktcoordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes P_3, so stellt die 10-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen $(W_1), \ldots, (W_{10})$ der Ebene in diesem P_3 eine 10-gliedrige Gruppe G_{10} von Punkttransformationen dar, welche die Gleichung

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

invariant lässt.

Wenn man nun statt x_1, z, y_1 neue Variabeln vermöge einer blossen Punkttransformation des P_3 einführt, indem man setzt

$$x' = x_1, \qquad y' = \frac{1}{2}y_1, \qquad z' = z - \frac{1}{2}x_1 y_1,$$

so geht G_{10} in eine neue Gruppe von Punkttransformationen des Raumes $P_3'(x', y', z')$ über, nämlich *in eine projective und zwar in die allgemeinste projective Gruppe, welche einen linearen Liniencomplex des P_3' invariant lässt.* Dieser lineare Complex wird definiert durch die Gleichung

$$dz' + x'dy' - y'dx' = 0,$$

welche aus der obigen:

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

durch Einführung der accentuierten Variabeln hervorgeht. Die genannte projective Gruppe des P_3' wollen wir mit G_{10}' bezeichnen. Ihre infinitesimalen Transformationen lauten entsprechend den Functionen $W_1, \ldots, W_{10}$ folgendermassen:

$$G_{10}'. \left\{ \begin{array}{l} r', \quad q' + x'r', \quad p' - y'r', \quad x'q', \quad x'p' - y'q', \quad y'p', \quad x'p' + y'q' + 2z'r', \\ z'q' + x'(x'p' + y'q' + z'r'), \qquad z'p' - y'(x'p' + y'q' + z'r'), \\ z'(x'p' + y'q' + z'r'), \end{array} \right.$$

wenn nämlich unter p', q', r' resp. $\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial z'}$ verstanden wird. *Sie combinieren sich* — abgesehen von Vorzeichen und unwesentlichen Zahlencoefficienten — *genau so wie die W selbst.*

Wie schon bemerkt, lässt die Gruppe G_{10}' den linearen Complex

$$dz' + x'dy' - y'dx' = 0$$

invariant. Ausser diesem lässt sie *keinen weiteren linearen Complex* invariant, denn ein solcher wäre ja definiert durch eine Gleichung

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' = 0,$$

die bei der Gruppe G_{10}' invariant bleiben müsste. Wenn wir aber in dieser Gleichung die ursprünglichen Veränderlichen wieder einführten, so

erhielten wir eine bei der Gruppe G_{10} oder also bei der Gruppe $(W_1), \dots, (W_{10})$ invariante Gleichung

$$X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z dz = 0.$$

Aber die irreducible Gruppe von Berührungstransformationen $(W_1), \dots, (W_{10})$ lässt nur eine solche Gleichung, nämlich

$$dz - y_1 dx_1 = 0$$

als invariant zu. Denn eine Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene (x_1, z, y_1), welche ausser dieser noch eine derartige Gleichung $X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z dz = 0$ invariant lässt, ist nach einem bekannten allgemeinen Satze, den wir hier nicht beweisen, reducibel.

Die G_{10}'' lässt somit *einen und nur einen* linearen Complex invariant.

Diese G_{10}' besitzt nun *zwei Arten von siebengliedrigen Untergruppen.* Bei einer siebengliedrigen Untergruppe der einen Art bleibt ein *Punkt,* bei einer der zweiten Art eine *Complexgerade* des P_3' invariant. Alle Gruppen der einen Art sind innerhalb der G_{10}' mit einander *gleichberechtigt.* Dasselbe gilt von allen Gruppen der anderen Art. Es hat dies seinen Grund darin, dass die G_{10}' jeden Punkt der P_3' in jeden anderen und jede Complexgerade in jede andere überzuführen vermag. Um also einen Typus für die eine oder andere Art von siebengliedrigen Untergruppen zu erhalten, braucht man nur unter den Transformationen der G_{10}' diejenigen 7 auszuwählen, welche einen bestimmten Punkt, z. B. den unendlich fernen Punkt der z'-Axe, oder eine bestimmte Complexgerade, z. B. die Axe des Ebenenbüschels $y' = \text{Const.}$, fest lassen.

So findet man die beiden *Typen:*

$$(1) \qquad r', \quad q' + x'r', \quad p' - y'r', \quad x'q', \quad x'p' - y'q', \quad y'p', \quad x'p' + y'q' + 2z'r'$$

und

$$(2) \qquad r', \quad q' + x'r', \quad p' - y'r', \quad x'p' - y'q', \quad y'p', \quad x'p' + y'q' + 2z'r',$$
$$z'p' - y'(x'p' + y'q' + z'r').$$

Dem einen entspricht in den (W) die Gruppe

$$(1') \qquad (W_1), (W_2), (W_3), (W_4), (W_5), (W_6), (W_7),$$

dem anderen die Gruppe

$$(2') \qquad (W_1), (W_2), (W_3), (W_5), (W_6), (W_7), (W_9).$$

Dass sich die beiden Typen ***durch keinerlei Punkttransformation in einander überführen lassen,*** lehrt ihre Zusammensetzung oder, was auf dasselbe hinauskommt, die der Gruppen (1′) und (2′). In der That, die Gruppe (1′) besitzt eine invariante eingliedrige Untergruppe (W_1), die Gruppe (2′) aber hat, wovon man sich durch einfache Berechnung überzeugen mag, keine invariante eingliedrige Untergruppe. Es ist hierzu zweckmässig, die Combinationen $\{W_i W_k\}$ zu kennen. Hierzu diene die folgende *Tabelle,* in welcher jedesmal der Schnitt einer Horizontal- mit einer Verticalreihe die Combination der ersten Glieder dieser Reihen angiebt.

$\{W_i W_k\} =$ (i ↓, k →)	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
W_1	0	0	0	0	0	0	$2W_1$	$2W_2$	$2W_3$	$4W_4$
W_2	0	0	$-W_1$	0	$-W_2$	$-2W_3$	W_2	W_4	W_5-W_7	$2W_8$
W_3	0	W_1	0	$2W_2$	W_3	0	W_3	W_6+W_7	W_6	$2W_9$
W_4	0	0	$-2W_2$	0	$-2W_4$	$-4W_5$	0	0	$-2W_8$	0
W_5	0	W_2	$-W_3$	$2W_4$	0	$-2W_6$	0	W_8	$-W_9$	0
W_6	0	$2W_3$	0	$4W_5$	$2W_6$	0	0	$2W_9$	0	0
W_7	$-2W_1$	$-W_2$	$-W_3$	0	0	0	0	W_8	W_9	$2W_{10}$
W_8	$-2W_2$	$-W_4$	$-W_5-W_7$	0	$-W_8$	$-2W_9$	$-W_8$	0	$-W_{10}$	0
W_9	$-2W_3$	W_7-W_5	$-W_6$	$2W_8$	W_9	0	$-W_9$	W_{10}	0	0
W_{10}	$-4W_4$	$-2W_8$	$-2W_9$	0	0	0	$-2W_{10}$	0	0	0

Mit Hülfe dieser Tafel lässt sich leicht zeigen, dass es keine infinitesimale Transformation der Gruppe (2′) giebt, welche mit einer beliebigen infinitesimalen Transformation dieser Gruppe (2′) combiniert, immer wieder — mit einem Zahlenfactor — reproduciert wird.

Nach dieser längeren, aber notwendigen Einschaltung kehren wir zu unserem *Problem*, zur Gruppe $(\Omega_1), \ldots, (\Omega_{10})$, zurück (pag. 159).

Bei dieser Gruppe bleiben die Ebenen $x_2 =$ Const. einzeln invariant. Wir betrachten nun die Gruppe von Berührungstransformationen, welche in der Ebene $x_2 = x_2^0$ durch die Gruppe (Ω) bestimmt wird. Ihre characteristischen Functionen ergeben sich aus $\Omega_1, \ldots, \Omega_{10}$, wenn $x_2 = x_2^0$ gesetzt wird. Es seien dies:

$$\Omega_1^0, \ldots, \Omega_{10}^0,$$

und ihre Gruppe nennen wir $\mathfrak{G}_{10}^0$. Ebenso haben wir in einer benachbarten Ebene $x_2 = x_2'$ eine Gruppe $\mathfrak{G}_{10}'$:

$$\Omega_1', \ldots, \Omega_{10}'.$$

Wir interpretieren x_1, z, y_1 in der obigen Weise als Punktcoordinaten eines dreifach ausgedehnten Raumes P_3^0, indem wir gleichzeitig in die Gruppe $\mathfrak{G}_{10}^0$ die neuen Variabeln

$$x^0 = x_1, \qquad y^0 = \frac{1}{2} y_1, \qquad z^0 = z - \frac{1}{2} x_1 y_1$$

(vgl. pag. 160) einführen. Damit haben wir eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$ im P_3^0 gefunden, bei welcher der lineare Complex

$$dz^0 + x^0 dy^0 - y^0 dx^0 = 0$$

und kein weiterer invariant bleibt, denn $(\Omega_1^0), \ldots, (\Omega_{10}^0)$ soll ja eine irreducibele Berührungstransformationsgruppe der Ebene $x_2 = x_2^0$ darstellen.

Ebenso haben wir in einem P_3' eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$ in den Coordinaten

$$x' = x_1, \qquad y' = \frac{1}{2} y_1, \qquad z' = z - \frac{1}{2} x_1 y_1$$

erhalten, bei der ausser dem Complex

$$dz' + x' dy' - y' dx' = 0$$

kein anderer invariant bleibt.

Halten wir nunmehr einen Punkt des P_3^0 fest, so ergiebt sich eine siebengliedrige Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_7^0$ von $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$. Ihr entspricht wegen der isomorphen Zuordnung eine siebengliedrige Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_7'$ der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$.

Da die $\overline{\mathfrak{G}}_7^0$ nach den obigen einleitenden Bemerkungen (indem sie vom Typus (1) ist) eine eingliedrige invariante Untergruppe besitzt, so hat auch die $\overline{\mathfrak{G}}_7'$, weil sie mit der $\overline{\mathfrak{G}}_7'$ isomorph ist, eine solche. Folglich ist die $\overline{\mathfrak{G}}_7'$ eine solche siebengliedrige Untergruppe der $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$, welche — wie die $\overline{\mathfrak{G}}_7^0$ im P_3^0 — im P_3' einen Punkt, nicht eine Complexgerade fest lässt.

Die beiden Gruppen $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$ und $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$ haben daher folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

1.) Beide haben *gleichviele* Variabeln x^0, y^0, z^0 resp. x', y', z'.

2.) Beide sind *transitiv*.

3.) Sie sind *isomorph* auf einander bezogen.

4.) Wenn man bei der $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$ einen *Punkt festhält,* so ergiebt sich eine siebengliedrige Untergruppe der $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$, welcher isomorph diejenige siebengliedrige Untergruppe der $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$ entspricht, die aus allen Transformationen besteht, welche einen *Punkt* des P_3' *festlassen.*

Nach einem allgemeinen Satze von Lie giebt es dann aber eine *Transformation der Variabeln x^0, y^0, z^0 in die Variabeln x', y', z', welche die $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$ in die $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$ überführt.*

Diese Transformation lässt sich nun auch als Transformationen in den ursprünglichen Variabeln x_1, z, y_1, die wir in der Ebene $x_2 = x_2^0$ durch x_1^0, z^0, y_1^0, in der Ebene $x_2 = x_2'$ durch x_1', z', y_1' zur Scheidung bezeichnen wollen, schreiben, und wir werden zeigen, dass sie eine *Berührungstransformation der Linienelemente* der Ebene $x_2 = x_2^0$ in die der Ebene $x_2 = x_2'$ ist.

In der That, die Transformation der x^0, y^0, z^0 in die x', y', z' führt ja die bei $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$ invariante Gleichung:

$$dz^0 + x^0 dy^0 - y^0 dx^0 = 0$$

in die einzige bei $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$ invariante Gleichung derselben Art:

$$dz' + x'dy' - y'dx' = 0$$

über. Die entsprechende Transformation in den ursprünglichen Variabeln führt also die bei $\mathfrak{G}_{10}^0$ invariante Gleichung:

$$dz^0 - y_1^0 dx_1^0 = 0$$

in die bei $\mathfrak{G}_{10}'$ invariante:

$$dz' - y_1' dx_1' = 0$$

über, d. h. sie ist eine Berührungstransformation der Ebene $x_2 = x_2^0$ in die Ebene $x_2 = x_2'$.

Mithin lassen sich die beiden Gruppen $\mathfrak{G}_{10}^0$ oder (Ω^0) und $\mathfrak{G}_{10}'$ oder (Ω') *vermöge einer Berührungstransformation* der Linienelemente in einander überführen.

Um diese Berührungstransformation wirklich zu bestimmen, kann man so verfahren. Man hält bei der $\mathfrak{G}_{10}^0$ ein Linienelement fest. Bei der entsprechenden $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$ hält man also dann einen Punkt des P_3^0 fest und es ergiebt sich eine 7-gliedrige Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_7^0$ von $\overline{\mathfrak{G}}_{10}^0$. Ihr entspricht isomorph eine ganz bestimmte 7-gliedrige Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_7'$ der $\overline{\mathfrak{G}}_{10}'$, bei der ein bestimmter Punkt der P_3' fest bleibt. Diesem Punkte endlich correspondiert ein bei der $\mathfrak{G}_{10}'$ in der Ebene $x_2 = x_2'$ festgehaltenes Linienelement. Die Linienelemente der Ebene $x_2 = x_2^0$ und $x_2 = x_2'$ sind hierdurch in ganz bestimmter Weise einander zugeordnet, und diese Zuordnung stellt die gewünschte Berührungstransformation dar.

Wir nehmen nun an, dass für $x_2 = x_2^0$ direct

$$\Omega_1^0 = W_1^0\,, \quad \ldots\ldots \quad \Omega_{10}^0 = W_{10}^0$$

sei. (Dies kann immer erreicht werden dadurch, dass man statt der Ω_k lineare Combinationen $\sum$ Const. Ω derselben als neue Ω_k einführt.) Alsdann giebt es also eine ganz bestimmte Berührungstransformation der Linienelemente, welche die Ω_k' in die W_k^0 überführt. Die Gleichungen dieser Berührungstransformation werden etwa sein:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= X(x_1', z', y_1', x_2'), \\ y_1^0 &= Y(x_1', z', y_1', x_2'), \end{aligned} \qquad z^0 = Z(x_1', z', y_1', x_2').$$

Diese Gleichungen aber kann man, — worauf wir schon früher einmal hingewiesen haben (siehe Einleitung unter E., pag. 125), — stets zu denen einer Berührungstransformation des R_3 vervollständigen.

Lassen wir nun den überflüssigen Index Null in den Coordinaten x_1^0, z^0, y_1^0 der Ebene $x_2 = x_2^0$ fort, so sehen wir:

Es giebt eine Berührungstransformation des R_3, welche $\Omega_1, \ldots, \Omega_{10}$ resp. in $W_1, \ldots, W_{10}$ überführt; und somit können wir diese Gruppe (W) selbst als den gesuchten Typus hinstellen.

Diese im wesentlichen von Lie herrührende Betrachtung liefert folglich den Typus:

IX.

$$\boxed{\begin{array}{c} 1\,,\, x_1\,,\, y_1\,,\, x_1^2\,,\, x_1 y_1\,,\, y_1^2\,,\, x_1 y_1 - 2z\,, \\ x_1(x_1 y_1 - 2z)\,,\, y_1(x_1 y_1 - 2z)\,,\, (x_1 y_1 - 2z)^2. \end{array}}$$

Wir müssen nun in Gemässheit des früheren (pag. 159) untersuchen, ob diese Gruppe nicht invariante Untergruppe einer 20-*gliedrigen Gruppe* sein kann, deren characteristische Functionen sämtlich die Form

$$\Omega_k \equiv \Sigma_i \omega_{ki}(x_2)\, W_i$$

haben.

Wäre dies der Fall, so müsste jedes $\{\Omega_\varkappa W_\lambda\}$ sich linear mit constanten Coefficienten durch $W_1, \ldots, W_{10}$ allein ausdrücken. Es ist aber allgemein

$$\{\Omega_k W_\lambda\} \equiv \Sigma_i \omega_{ki} \{W_i W_\lambda\},$$

und unsere allgemeine Combinationstafel (pag. 162) lehrt ohne Schwierigkeit, dass die ω_{ki} sich auf Constanten reducieren müssten.

Also ergiebt sich *kein* 20-gliedriger Typus, um so weniger ein 30- und mehr-gliedriger Typus. Typus IX. ist der *einzige*.

Es bedarf nur noch weniger Bemerkungen, um diejenigen *Gruppen* $A_k f$, $C_i f$ zu bilden, deren Untergruppen $A_k f$ die Linienelemente der Ebene $x_2 =$ Const. 10-gliedrig transformieren.

Indem wir nämlich auf die zu Eingang des § 2 gemachten Bemerkungen verweisen und uns dadurch ihrer im wesentlichen doch blossen Wiederholung an dieser Stelle überheben, bemerken wir, dass es nunmehr unsere Aufgabe ist, zum Typus IX. eine, zwei oder drei characteristische Functionen hinzuzufügen von der Form

$$\Omega_m = x_2^{m-1} y_2 + \Phi_m(x_1\,,\, x_2\,,\, z\,,\, y_1),$$

— wo entweder $m = 1$ oder $m = 1, 2$ oder endlich $m = 1, 2, 3$ zu setzen ist —, und zwar derart, dass jede Combination von Ω_m mit einer der durch W bezeichneten characteristischen Functionen des Typus IX. wieder von der Form Σ Const. W ist.

Da nun $W_1, \ldots, W_{10}$ ganz frei von x_2 und y_2 sind, so folgt aus der allgemeinen Combinationsformel (5') der Einleitung sofort, dass jedes:

$$\{\Omega_m, W_i\} \equiv \{\Phi_m, W_i\}$$

ist. Es muss also die zu Φ_m allein gehörige infinitesimale Berührungstransformation (Φ_m) zusammen mit $(W_1), \ldots, (W_{10})$ eine *Gruppe* bilden, welche $(W_1), \ldots, (W_{10})$ zur invarianten Untergruppe besitzt. Diese Gruppe $(\Phi_m), (W_1), \ldots, (W_{10})$ transformiert die Linienelemente der Ebene $x_2 = \text{Const.}$ 10-*gliedrig*. Nach dem obigen giebt es aber nur *eine* 10-gliedrige derartige Gruppe, nämlich die vom Typus IX. Daraus folgt, dass Φ_m die Form

$$\Phi_m \equiv \sum \text{Const. } W$$

haben muss.

Weil nun in den gesuchten Gruppen die characteristischen Functionen $W_1, \ldots, W_{10}$ sämtlich auftreten, so können wir folglich in

$$\Omega_m = x_2^{m-1} y_2 + \Phi_m$$

das Glied Φ_m einfach streichen, sodass wir haben

$$\Omega_m \equiv x_2^{m-1} y_2 .$$

Mithin müssen die gesuchten Gruppen die typischen Formen besitzen:

X. $1,\ x_1,\ y_1,\ x_1^2,\ x_1 y_1,\ y_1^2,\ x_1 y_1 - 2z,\ x_1(x_1 y_1 - 2z),\ y_1(x_1 y_1 - 2z),\ (x_1 y_1 - 2z)^2,\ y_2.$

XI. $1,\ x_1,\ y_1,\ x_1^2,\ x_1 y_1,\ y_1^2,\ x_1 y_1 - 2z,\ x_1(x_1 y_1 - 2z),\ y_1(x_1 y_1 - 2z),\ (x_1 y_1 - 2z)^2,\ y_2,\ x_2 y_2.$

XII. $1,\ x_1,\ y_1,\ x_1^2,\ x_1 y_1,\ y_1^2,\ x_1 y_1 - 2z,\ x_1(x_1 y_1 - 2z),\ y_1(x_1 y_1 - 2z),\ (x_1 y_1 - 2z)^2,\ y_2,\ x_2 y_2,\ x_2^2 y_2.$

Aus demselben Grunde, der pag. 156 in betreff der Typen III. bis VIII. geltend gemacht wurde, ist auch hier zu sagen, dass die Irreducibilität der Gruppen IX., X., XI., XII. bewiesen ist, sobald gezeigt ist, das Typus I. irreducibel ist.

§ 4. *Schlussbemerkungen.*

Nachdem wir somit alle Typen aufgestellt haben, harren noch einige *Einzelfragen* ihrer Erledigung.

Zunächst fragt es sich, ob die gefundenen Gruppen auch wirklich *irreducibel* sind. Nach dem früheren genügt es, die Irreducibilität des Typus I. nachzuweisen. Typus I. aber ist irreducibel, sobald eine Untergruppe dieses Typus irreducibel ist. Offenbar enthält I. Untergruppen von der Form

$$x_1^2, x_1y_1, y_1^2, Ax_1, Ay_1, A^2,$$

wo A eine nicht identisch verschwindende Function von x_2 allein ist. Es ist leicht — und wird weiter unten entwickelt werden — durch Einführung neuer Variabeln vermöge einer Berührungstransformation des R_3 hierin $A \equiv 1$ zu machen. *Wir werden nun die Irreducibilität der Gruppe*

$$(1) \qquad x_1^2, x_1y_1, y_1^2, x_1, y_1, 1,$$

natürlich diese aufgefasst als Gruppe des R_3 — nicht bloss der Ebene —, nachweisen.

Wir könnten dazu unser analytisches Criterium verwenden. (Siehe in der Einleitung unter B.) Doch erledigt sich unsere Aufgabe fast ohne Rechnungen durch die folgende Überlegung:

Wenn die obige Gruppe (1) des R_3 reducibel ist, so giebt es im R_3 eine Schar von ∞^3 Vereinen von je ∞^2 Flächenelementen, welche Schar bei der Gruppe (1) invariant bleibt und nicht etwa nur aus ∞^4, sondern wirklich aus allen ∞^5 Flächenelementen des R_3 besteht. Jene ∞^3 Vereine werden geometrisch durch ∞^3 *Flächen* oder durch ∞^3 *Curven* oder schliesslich durch die ∞^3 *Punkte* des R_3 dargestellt.

Im *letzteren* Falle ist auch die Gruppe (1), aufgefasst als Gruppe der Ebene $x_2 =$ Const., reducibel, was aber dem Thatsächlichen widerspricht.

In dem *anderen* Falle, in welchem eine Schar von ∞^2 Curven des R_3 in sich transformiert wird, liegen entweder je ∞^2 Curven der Schar in einer Ebene $x_2 =$ Const. oder aber die Curven schneiden jede dieser Ebenen in ihren ∞^2 Punkten. Bei beiden Annahmen ist wieder die Gruppe (1), aufgefasst als Gruppe der Ebene, reducibel, was absurd ist.

Mithin bleibt nur noch der Fall zu berücksichtigen, bei welchem jene ∞^3 Vereine des R_3 durch ∞^3 *Flächen* desselben dargestellt werden.

Hier sind wieder *zwei* verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden: Entweder nämlich schneiden die ∞^3 Flächen eine jede der Ebenen $x_2 =$ Const. in *nur* ∞^2 Curven oder aber in ∞^3 Curven. (Beispiel für die erstere Möglichkeit: Die ∞^3 Ebenen des R_3.) Würden wir aber ersteres annehmen, so müsste wieder die Gruppe (1) in der Ebene reducibel sein. Da dies nicht der Fall ist, so bleibt schliesslich nur die Annahme, dass *die ∞^3 Flächen des R_3 die Ebenen $x_2 =$ Const. in je ∞^3 Curven schneiden.*

Da nun bei der Gruppe (1) der Ebene $x_2 =$ Const. bekanntlich nur *eine* Schar von ∞^3 Curven invariant bleibt, nämlich die Schar aller *Kegelschnitte, welche ein gewisses unendlich fernes Linienelement gemein haben,*[1] so folgt, dass die Schar der ∞^3 Flächen aus jeder Ebene $x_2 =$ Const. gerade die betreffenden ∞^3 Kegelschnitte ausschneiden muss.

Es werden die Linienelemente einer jeden Ebene $x_2 =$ Const. bei der Gruppe (1) genau so wie die jeder anderen Ebene $x_2 =$ Const. transformiert. Eine Fläche jener Schar von ∞^3 Flächen schneidet nun die Ebenen $x_2 =$ Const. in einer Reihe von Kegelschnitten $k, k', k'', \ldots$. Jedem dieser Kegelschnitte entspricht in der Ebene $x_2 = 0$ ein ihm congruenter: $k_1, k_1', k_1'', \ldots$, derart also, dass k_1 Projection von k, k_1' die von k' etc. auf die Ebene $x_2 = 0$ ist. Damit entspricht jeder unserer ∞^3 Flächen des R_3 in der Ebene $x_2 = 0$ eine Schar von ∞^1 Kegelschnitten $k_1, k_1', k_1'', \ldots$. Die ∞^3 Kegelschnitte dieser Ebene (welche ein gewisses unendlich fernes Linienelement gemein haben) werden also *in ∞^3 Scharen von je ∞^1 Curven zerlegt.* Da die Gruppe (1) die Flächen in einander überführt, und da sie die Linienelemente aller Ebenen $x_2 =$ Const. in derselben Art transformiert, so folgt, dass in der Ebene $x_2 =$ Const. die Gesamtheit jener ∞^3 Scharen von je ∞^1 Kegelschnitten invariant bleibt,

[1] Lie, *Theorie der Transformationsgruppen IV.* Archiv for Math. og Naturvidensk. 1879, p. 457.

in der Weise, dass eine jede Schar in eine andere Schar der Gesamtheit übergeführt wird.

Halten wir nun unter den ∞^3 Kegelschnitten der Ebene $x_2 = 0$ irgend einen (k) fest, so bleiben, da alle Ebenen $x_2 =$ Const. gleiche Transformationen erfahren, mit ihm alle die ∞^1 Kegelschnitte in den verschiedenen Ebenen $x_2 =$ Const. invariant, welche k entsprechen, d. h. k zur Projection auf die Ebene $x_2 = 0$ haben. Durch jeden dieser Kegelschnitte geht eine Fläche unserer Flächenschar und zwar durch jeden eine andere. Wenn nämlich alle die ∞^1 Kegelschnitte derselben Fläche angehörten, so würde folgen, dass jede der Flächen ein Cylinder wäre. Aber eine solche Schar von ∞^3 Cylinderflächen (mit derselben Richtlinie) umfasst nur ∞^4 Flächenelemente des R_3, nicht alle ∞^5, ist also ausgeschlossen. Folglich geht durch jeden unserer ∞^1 festgehaltenen Kegelschnitte je eine Fläche der Schar. Jede dieser ∞^1 Flächen muss natürlich mit k festbleiben. Damit ergiebt sich: Wenn wir in der Ebene $x_2 = 0$ (die ja den Character einer Ebene allgemeiner Lage hat) einen der ∞^3 Kegelschnitte festhalten, so bleiben auch ∞^1 Flächen der Schar invariant. Da nun jede Fläche durch eine Schar von ∞^1 Kegelschnitten dieser Ebene in der obigen Weise ersetzt werden kann, so folgt weiter:

Wird in der Ebene $x_2 = 0$ ein Kegelschnitt festgehalten, so bleiben in dieser Ebene ∞^1 der ∞^3 Scharen von je ∞^1 Kegelschnitten, und zwar jede Schar einzeln, invariant.

Um nunmehr zu prüfen, ob dies wirklich der Fall ist oder nicht, sind die Transformationen der Kegelschnitte der Ebene $x_2 = 0$ unter einander bei der Gruppe (1) zu untersuchen. Dabei ist es zweckmässig, die Kegelschnitte als Individuen, als Elemente der Transformation aufzufassen. Wir interpretieren daher diese ∞^3 Kegelschnitte durch die *Punkte eines dreifach ausgedehnten Raumes* $\mathfrak{R}_3$. Analytisch ist dies so zu bewerkstelligen:

Die ∞^3 Kegelschnitte unserer Ebene $x_2 = 0$ werden durch die Gleichung zwischen x_1 und z (den Punktcoordinaten in der Ebene) dargestellt:

$$z = \mathfrak{x} + \mathfrak{y}x_1 + \mathfrak{z}x_1^2,$$

wo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ willkürliche Constanten bedeuten. Jedem Wertetripel $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ entspricht einer der Kegelschnitte. Wir nehmen nun $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ zu Cartesischen Punktcoordinaten in unserem $\mathfrak{R}_3$ und damit ist jeder der ∞^3 Kegelschnitte von $x_2 = 0$ durch einen Punkt dieses $\mathfrak{R}_3$ dargestellt.

Führen wir die Transformationen von (1) in der Ebene $x_2 = 0$ aus, so werden dadurch diese ∞^3 Curven unter einander vertauscht und damit auch ihre Bildpunkte im $\mathfrak{R}_3$, d. h.: Jeder Transformation der Gruppe (1) entspricht eine bestimmte Punkttransformation des Raumes $\mathfrak{R}_3$. Diese Punkttransformationen aber sind leicht aufzustellen.

In der That, wenn wir z. B. in der Gruppe (1) die infinitesimale Transformation mit der characteristischen Function 1 betrachten, so erhalten x_1 und z die Incremente:

$$\partial x_1 = 0, \qquad \partial z = -\partial t,$$

wo ∂t eine infinitesimale Constante vorstellt. Der Kegelschnitt

$$z = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} x_1 + \mathfrak{z} x_1^2$$

muss dadurch wieder in einen Kegelschnitt derselben Art übergeführt werden, dessen bestimmende Parameter $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ etwa die Werte $\mathfrak{x} + \partial\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} + \partial\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z} + \partial\mathfrak{z}$ haben. Dann muss sein

$$z + \partial z = (\mathfrak{x} + \partial\mathfrak{x}) + (\mathfrak{y} + \partial\mathfrak{y})(x_1 + \partial x_1) + (\mathfrak{z} + \partial\mathfrak{z})(x_1 + \partial x_1)^2$$

d. h.:

$$\partial z = \partial\mathfrak{x} + \partial\mathfrak{y} \cdot x_1 + \partial\mathfrak{z} \cdot x_1^2 + (\mathfrak{y} + 2\mathfrak{z} x_1)\partial x_1.$$

Nun ist $\partial x_1 = 0$, $\partial z = -\partial t$, also kommt:

$$-\partial t = \partial\mathfrak{x} + \partial\mathfrak{y} \cdot x_1 + \partial\mathfrak{z} \cdot x_1^2,$$

d. h., da dies für alle x_1 gilt:

$$\partial\mathfrak{x} = -\partial t, \qquad \partial\mathfrak{y} = 0, \qquad \partial\mathfrak{z} = 0.$$

Jener Berührungstransformation mit der characteristischen Function 1 entspricht also in unserem $\mathfrak{R}_3$ die Punkttransformation $-\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}$ oder, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} = \mathfrak{p}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} = \mathfrak{q}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}} = \mathfrak{r}$$

setzen, die Transformation $-\mathfrak{r}$ oder, da es auf Vorzeichen nicht ankommt, kurz $\mathfrak{r}$.

In dieser Weise — und unter eventueller Berücksichtigung auch der

Transformation, die y_1 erfährt, — ergiebt sich unschwer, dass der Gruppe (1) im $\mathfrak{R}_3$ die Gruppe von Punkttransformationen entspricht:

(2) $$\mathfrak{p}\,,\ \mathfrak{q}\,,\ \mathfrak{r}\,,\ \mathfrak{y}\mathfrak{p}+2\mathfrak{z}\mathfrak{q}\,,\ \mathfrak{y}\mathfrak{q}+2\mathfrak{z}\mathfrak{r}\,,\ \mathfrak{y}^2\mathfrak{p}+4\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{q}+4\mathfrak{z}^2\mathfrak{r}.$$

Wie wir sahen, müssen sich (wenn die Gruppe (1) im R_3 reducibel ist) jene ∞^3 Kegelschnitte der Ebene in ∞^3 Scharen von je ∞^1 zusammenfassen lassen, derart, dass durch (1) diese Scharen unter einander vertauscht werden. Jeder Schar entspricht im $\mathfrak{R}_3$ eine Reihe von ∞^1 Punkten, d. h. eine Curve (die sich im allgemeinen aus leicht ersichtlichem Grunde nicht auf einen Punkt reduciert). Mithin muss bei der Gruppe (2) des $\mathfrak{R}_3$ eine Schar von ∞^3 Curven invariant bleiben (die sich, wie ebenfalls leicht aus der Irreducibilität der Gruppe (1) in der Ebene und aus anderen Eigenschaften dieser Gruppe folgt, nicht auf nur ∞^2 oder gar ∞^1 Curven reducieren darf).

Die Gruppe (2) nun lässt, wie man sofort einsieht und was man auch methodisch ableiten kann, die *Schar aller Geraden* invariant, deren Fortschreitungsrichtungen der Gleichung genügen

$$d\mathfrak{y}^2 = 4d\mathfrak{x}d\mathfrak{z},$$

d. h. einen gewissen *Liniencomplex zweiten Grades*.

Bei der Gruppe (2) bleibt *keine andere Schar von ∞^3 Curven*, ausser der Schar dieser Geraden, invariant, vorausgesetzt natürlich, dass wir verlangen, diese ∞^3 Curven sollen den ganzen $\mathfrak{R}_3$ und nicht etwa nur eine Fläche desselben erfüllen, was ja unseren Zwecken nicht entspräche.

Der Beweis stellt sich so: Durch einen beliebigen Punkt P des $\mathfrak{R}_3$ müssen ∞^1 Curven der gesuchten Schar gehen. Halten wir also den Punkt bei der Gruppe (2) fest, so müssen diese ∞^1 Curven unter einander vertauscht werden. Sie besitzen im Punkte P ∞^1 oder nur eine discrete Anzahl von Tangenten. Letzterer Fall ist ausszuschliessen, denn bei ihm müssten diese Tangenten einzeln stehen bleiben, während doch bei (2) mit einem Punkte immer nur die durch ihn gehende zur $\mathfrak{x}$-Axe parallele Gerade invariant bleibt. Die ∞^1 durch P gehenden Tangenten bilden nun in diesem Punkte einen Kegel, der mit P invariant bliebe. Aber mit P bleibt nur der Kegel der durch P gehenden Geraden des Complexes fest. Also haben die gesuchten Curven immer Complexgeraden zu Tangenten und zu jedem Punkte P und je einer der durch ihn ge-

henden Complexgeraden gehört immer je eine Curve der gesuchten Schar (oder eine discrete Anzahl, was für uns auf dasselbe hinauskommt). Wenn wir also einen Punkt P und eine der durch ihn laufenden Complexgeraden t festhalten, so muss auch diejenige Curve der gesuchten Schar, welche durch P geht und t zur Tangente in P hat, festbleiben.

Da bei der Gruppe (2) der Nullpunkt keine ausgezeichneten Eigenschaften hat, so können wir — ohne zu specialisieren — ihn anstelle des beliebigen Punktes P festhalten. Die Transformation von (2) aber, welche den Nullpunkt invariant lassen, sind

$$\mathfrak{y}\mathfrak{p} + 2\mathfrak{z}\mathfrak{q}\,, \quad \mathfrak{y}\mathfrak{q} + 2\mathfrak{z}\mathfrak{r}\,, \quad \mathfrak{y}^2\mathfrak{p} + 4\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{q} + 4\mathfrak{z}^2\mathfrak{r}.$$

Durch den Nullpunkt gehen die durch die Gleichungen

$$\mathfrak{y} = c\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{c^2}{4}\mathfrak{x}$$

dargestellten ∞^1 Complexgeraden. Wir halten eine derselben, (c), fest. Dann bleiben nur noch die beiden infinitesimalen Transformationen

$$2\mathfrak{y}\mathfrak{p} + (4\mathfrak{z} + c\mathfrak{y})\mathfrak{q} + 2c\mathfrak{z}\mathfrak{r},$$
$$\mathfrak{y}^2\mathfrak{p} + 4\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{q} + 4\mathfrak{z}^2\mathfrak{r}.$$

Bei diesen muss also eine durch den Nullpunkt gehende Curve, welche die Gerade (c) zur Tangente im Nullpunkt hat, invariant bleiben. Die Gerade (c) hat nun als Tangente mit der Curve ausser dem Nullpunkte noch einen unendlich benachbarten Punkt, etwa:

$$\mathfrak{x} = \varepsilon, \qquad \mathfrak{y} = c\varepsilon, \qquad \mathfrak{z} = \frac{c^2}{4}\varepsilon,$$

wo ε infinitesimal sei, gemein, der natürlich auch invariant sein muss. Aber bei der ersten der vorstehenden infinitesimalen Transformationen bleibt er offenbar nicht invariant. Also folgt, dass es keine derartige Curve giebt, womit bewiesen ist, dass nur die Schar der ∞^3 Complexgeraden eine Curvenschar der gesuchten Art ist.

Mithin müssen die Complexgeraden jene ∞^3 Scharen von je ∞^1 Kegelschnitten der Ebene $x_2 = 0$ im $\mathfrak{R}_3$ darstellen. Wenn wir einen Kegelschnitt der Ebene $x_2 = 0$ festhalten, so müssen, wie wir sahen, ∞^1 solche

Scharen von Kegelschnitten, und zwar jede Schar einzeln, invariant bleiben. Für den $\mathfrak{R}_3$ folgt daher: Halten wir einen Punkt des $\mathfrak{R}_3$ fest, so müssen alle ∞^1 durch ihn gehenden Geraden des Complexes einzeln festbleiben.

Dies aber ist bei der Gruppe (2) nicht der Fall. Daher folgt umgekehrt: Es kann bei der Gruppe (1) keine Schar von ∞^3 Flächen, welche alle ∞^5 Flächenelemente des R_3 umfassen, invariant bleiben. Also ist nach dem früheren die Gruppe (1), aufgefasst als Gruppe des R_3, irreducibel, was zu beweisen war.

Mithin sind alle Gruppentypen I. ... XII. irreducibel.

Endlich bleibt noch die eine Frage zu untersuchen, *ob und welche Typen sich durch Einführung neuer Variabeln vermöge einer Berührungstransformation des R_3 in einander überführen lassen,* welche also als *überflüssig* verworfen werden können.

Um uns hierüber Klarheit zu verschaffen, werden wir uns zunächst fragen, *ob bei irgend welchen der gefundenen Typen mehr als eine Schar von Gleichungen*

$$\Phi(x_1, x_2, z, y_1, y_2) = \text{Const.}$$

invariant bleibt. Eine solche Schar kennen wir ja schon, es ist die Schar $x_2 = \text{Const.}$

Wir bemerkten schon, dass alle Typen eine Untergruppe enthalten von der Form

$$(3) \qquad x_1^2,\ x_1y_1,\ y_1^2,\ Ax_1,\ Ay_1,\ A^2,$$

wo A eine nicht verschwindende Function von x_2 allein bedeutet. Bei den Gruppen V. ... XII. können wir sogar in (3) $A \equiv 1$ setzen. Auch bei I. und II. können wir eines der A_i gleich 1 machen durch Einführung neuer Variabeln, ohne dadurch die Gestalt der Gruppen wesentlich zu ändern. Wir führen nämlich in I. und II. neue Variabeln ein vermöge der Berührungstransformation:

$$x_1 = \rho(x_2')x_1', \qquad y_1 = \rho y_1', \qquad z = \rho z',$$
$$x_2 = x_2', \qquad y_2 = \rho^2 y_2' - \rho\rho'(x_1'y_1' - 2z'),$$

bei der

$$dz - y_1dx_1 - y_2dx_2 = \rho^2(dz' - y_1'dx_1' - y_2'dx_2')$$

ist. Setzen wir hierin $\rho = A_i$, so wird in der neuen Gruppe das neue

$A_i \equiv 1$. Beim Typus III. und IV. können wir ähnlich verfahren. Nur muss hierbei beachtet werden, dass die infinitesimale Transformation (y_2) ihre Form durch Benutzung jener neuen Variabeln wesentlich ändert. Sie geht nämlich über in

$$\frac{1}{\rho^2} y_2' = y_2' - \frac{\rho'}{\rho}(x_1' y_1' - 2z').$$

In III. und IV. haben aber die A_i die allgemeine Form $x_2^\sigma e^{\alpha x_2}$, sodass, wenn $\rho = e^{\alpha x_2}$ gesetzt wird, diese characteristische Function wird zu

$$y_2' - \alpha(x_1' y_1' - 2z').$$

Typus III. werden wir also so schreiben können:

$$\text{III}'.\quad \left|\begin{array}{c} x_1^2\,,\ x_1 y_1\,,\ y_1^2\,,\ x_1\,,\ y_1\,,\ 1\,, \\ x_2^{\sigma_i} e^{a_i x_2} x_1\,,\ x_2^{\sigma_i} e^{a_i x_2} y_1\,,\ x_2^{\tau_k} e^{\beta_k x_2}\,, \\ y_2 + a(x_1 y_1 - 2z), \\ \sigma_i = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots, s_i, \qquad \tau_k = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots, t_k, \\ i = 1\,, 2\,, \ldots, s, \qquad k = 1\,, 2\,, \ldots, t. \end{array}\right.$$

während im Fall IV. noch $x_1 y_1 - 2z$ hinzutritt, sodass a hierin dann gleich Null gesetzt werden kann.

Also sehen wir: wir können immer annehmen, dass alle Typen die Untergruppe

$$(1)\qquad x_1^2\,,\ x_1 y_1\,,\ y_1^2\,,\ x_1\,,\ y_1\,,\ 1$$

besitzen. Nur ist dabei III. durch III'. zu ersetzen.

Wenn nun einer der Typen die Gleichungenschar $\Phi = \text{Const.}$ invariant lassen soll, so muss auch diese Untergruppe dieselbe invariant lassen. Bei der Gruppe (1) bleiben nun aber offenbar x_2 und y_2 absolut invariant, d. h. diese Gruppe lässt jede Schar von der Form

$$\Phi(x_2\,, y_2) = \text{Const.}$$

invariant. Wenn noch eine andere Schar $\Phi(x_1\,, x_2\,, z\,, y_1\,, y_2) = \text{Const.}$ bei (1) invariant bliebe, so können wir sie offenbar auch einfacher so schreiben:

$$\Phi(x_1\,, z\,, y_1) = \text{Const.},$$

da ja x_1, z, y_1 bei (1) Incremente erhalten, die nur von x_1, z, y_1 selbst abhängen. Aber bei der Gruppe (1) bleibt, wie man leicht übersieht, kein derartiges Gleichungensystem ungeändert.

Also hat jede bei (1) und daher auch jede bei unseren Typen I., II., III., IV., ..., XII. invariante Gleichungenschar $\Phi = \text{Const.}$ nunmehr die generelle Form

$$\Phi(x_2, y_2) = \text{Const.}$$

Hiernach ist es nicht mehr schwer, die bei jeder einzelnen unserer Gruppen sich ergebenden Scharen zu bestimmen. Wir bemerken nur soviel: Die Rechnung lehrt, dass die Typen VII. bis XII. stets nur die Schar $x_2 = \text{Const.}$ invariant lassen, während die Typen I. bis VI., allerdings nur in Specialfällen, mehrere invariante Gleichungenscharen besitzen.

Wenn wir also unsere Typen nicht durch besondere Wahl der in ihnen vorkommenden Constanten specialisieren, so können wir sagen: Sie lassen sämtlich nur die Schar $x_2 = \text{Const.}$ invariant.

Darin liegt dann auch, dass *sie sich nicht in einander überführen lassen,* denn sie besitzen sämtlich dieser einzigen Schar $x_2 = \text{Const.}$ gegenüber ein verschiedenes und durch Einführung neuer Variabeln nicht auszugleichendes Verhalten. Wohlbemerkt ist hierdurch nicht ausgeschlossen, dass die Typen I. bis VI. in Specialfällen doch auf einander zurückführbar wären. Im allgemeinen aber ist keiner unserer zwölf Typen überzählig. Wir stellen daher alle zwölf in einer Tabelle zusammen.

1.) x_2 *bleibt invariant bei den Typen:*

I.	II.	IX.
$x_1^2, x_1y_1, y_1^2,$ $A_i(x_2)x_1, A_i(x_2)y_1,$ $(i=1,2,\dots,s)$ $B_k(x_2)$, $(k=1,2,\dots,t)$ wo jedes $A_iA_j = \Sigma \text{Const.}\, B$ sein muss.	$x_1^2, x_1y_1, y_1^2,$ $A_i(x_2)x_1, A_i(x_2)y_1,$ $(i=1,2,\dots,s)$ $B_k(x_2)$, $(k=1,2,\dots,t)$ wo jedes $A_iA_j = \Sigma \text{Const.}\, B$ sein muss. $x_1y_1 - 2z.$	$1, x_1, y_1, x_1^2,$ $x_1y_1, y_1^2, x_1y_1 - 2z,$ $x_1(x_1y_1 - 2z),$ $y_1(x_1y_1 - 2z),$ $(x_1y_1 - 2z)^2.$

2.) x_2 *wird eingliedrig transformiert bei den Typen:*

III.	IV.	X.
x_1^2 , x_1y_1 , y_1^2, $x_2^{\sigma_i}e^{a_ix_2}x_1$, $x_2^{\sigma_i}e^{a_ix_2}y_1$, $x_2^{\tau_k}e^{\beta_kx_2}$, $\sigma_i = 0, 1, \dots, s_i$, $\tau_k = 0, 1, \dots, t_k$ $a_i =$ Const., $\beta_k =$ Const., $i=1,2,\dots,s$, $k=1,2,\dots,t$, sodass jedes $x^{\sigma_i+\sigma_j}e^{(a_i+a_j)x_2}$ die Form Σ Const. $x_2^{\tau_k}e^{\beta_kx_2}$ hat. y_2.	x_1^2 , x_1y_1 , y_1^2, $x^{\sigma_i}e^{a_ix_2}x_1$, $x^{\sigma_i}e^{a_ix_2}y_1$, $x_2^{\tau_k}e^{\beta_kx_2}$, $\sigma_i = 0, 1, \dots, s_i$, $\tau_k = 0, 1, \dots, t_k$ $a_i =$ Const., $\beta_k =$ Const., $i=1,2,\dots,s$, $k=1,2,\dots,t$, sodass jedes $x^{\sigma_i+\sigma_j}e^{(a_i+a_j)x_2}$ die Form Σ Const. $x_2^{\tau_k}e^{\beta_kx_2}$ hat. y_2 , $x_1y_1 - 2z$.	1 , x_1 , y_1 , x_1^2, x_1y_1 , y_1^2 , $x_1y_1 - 2z$, $x_1(x_1y_1 - 2z)$, $y_1(x_1y_1 - 2z)$, $(x_1y_1 - 2z)^2$, y_2.

3.) x_2 *wird zweigliedrig transformiert bei den Typen:*

V.	VI.	XI.
x_1^2 , x_1y_1 , y_1^2, x_1, x_2x_1, $x_2^2x_1$, ..., $x_2^sx_1$, y_1, x_2y_1, $x_2^2y_1$, ..., $x_2^sy_1$, 1 , x_2, x_2^2, ..., x_2^t, y_2, $x_2y_2 + b(x_1y_1 - 2z) + cx_2^{t+1}$. $(t \geqq 2s)$	x_1^2 , x_1y_1 , y_1^2, x_1, x_2x_1, $x_2^2x_1$, ..., $x_2^sx_1$, y_1, x_2y_1, $x_2^2y_1$, ..., $x_2^sy_1$, 1 , x_2, x_2^2, ..., x_2^t, y_2 , x_2y_2, $x_1y_1 - 2z$. $(t \geqq 2s)$	1 , x_1 , y_1 , x_1^2, x_1y_1 , y_1^2 , $x_1y_1 - 2z$, $x_1(x_1y_1 - 2z)$, $y_1(x_1y_1 - 2z)$, $(x_1y_1 - 2z)^2$, y_1 , x_2y_2.

4.) x_2 *wird dreigliedrig transformiert bei den Typen:*

VII.	VIII.	XII.
1 , x_1 , y_1 , x_1^2 , x_1y_1 , y_1^2, y_2 , x_2y_2 , $x_2^2y_2$.	1 , x_1 , y_1 , x_1^2 , x_1y_1 , y_1^2, y_2 , x_2y_2 , $x_2^2y_2$, $x_1y_1 - 2z$.	1 , x_1 , y_1 , x_1^2 , x_1y_1 , y_1^2, $x_1y_1 - 2z$, $x_1(x_1y_1 - 2z)$, $y_1(x_1y_1 - 2z)$, $(x_1y_1 - 2z)^2$, y_2 , x_2y_2 , $x_2^2y_2$.

In der *Gruppe V.* kommen *zwei willkürliche Constanten* vor. Um sie zu specialisieren, führen wir vermöge der Berührungstransformation

$$x_1 = x_1', \qquad y_1 = y_1', \qquad z = z' + a x_2'^{t+1},$$
$$x_2 = x_2', \qquad y_2 = y_2' + (t+1) a x_2'^{t},$$

bei welcher

$$dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = dz' - y_1' dx_1' - y_2' dx_2'$$

ist, neue Variabeln ein, wodurch die Gruppe ihre Gestalt nicht wesentlich ändert. Allerdings folgt aus y_2 die neue characteristische Function:

$$y_2' + (t+1) a x_2'^{t}.$$

Da aber $x_2'^{t}$ selbständig auftritt, so können wir diese verkürzen auf y_2' selbst. Anstelle der letzten characteristischen Function

$$x_2 y_2 + b(x_1 y_1 - 2z) + c x_2^{t+1}$$

tritt diese:

$$x_2 y_2 + b(x_1 y_1 - 2z) + [a(t+1) - 2ab + c] x_2^{t+1}.$$

Wählen wir also a so, dass

$$a(t+1) - 2ab + c = 0$$

wird, so haben wir erreicht, dass in V. die Constante c gleich Null gesetzt werden kann. Aber dies geht nicht, wenn:

$$t + 1 = 2b \quad \text{und} \quad c \neq 0$$

ist. In diesem Falle können wir durch Benutzung der Berührungstransformation

$$x_1 = x_1', \qquad x_2 = x_2', \qquad y_1 = c y_1', \qquad y_2 = c y_2', \qquad z = c z'$$

in V. $c = 1$ machen. Mithin kann in V. einmal $c = 0$ und das andere Mal $b = \frac{t+1}{2}$, $c = 1$ gesetzt werden. Dadurch zerlegt sich V. in *zwei Untertypen*. Dass dieselben nicht in einander übergeführt werden können, lehrt ihre Zusammensetzung.

Leipzig, im Januar 1889.[1]

[1] Seit der Abfassung dieser Arbeit hat LIE die Bezeichnung *Verein von Elementen* durch den schon früher von ihm benutzten Ausdruck *Element-Mannigfaltigkeit* wieder ersetzt und demgemäss wäre unser Text an mehreren Stellen etwas abzuändern.

Im Januar 1890.

BEWEIS DER EXISTENZ DES POTENTIALS

DAS AN DER GRENZE DES BETRACHTETEN RAUMES GEGEBENE WERTHE HAT

FÜR DEN FALL DASS DIESE GRENZE EINE ÜBERALL CONVEXE FLÄCHE IST[1]

VON

GUSTAV KIRCHHOFF.

Der in der Überschrift genannte Beweis soll dadurch geliefert werden, dass für das fragliche Potential ein Ausdruck gebildet wird, der es darstellt als herrührend von einer Doppelschicht von Massen an der Oberfläche des betrachteten Raumes. Die Bildung dieses Ausdrucks setzt nicht die Convexität der Oberfläche voraus; derselbe enthält aber eine unendliche Reihe und die Convergenz dieser zu beweisen ist mir nur unter der genannten Voraussetzung gelungen.

Es sei ds ein Element der Oberfläche, U der Werth, den das Potential in ihm haben soll, r der Abstand eines Punktes P im Raume

[1] Vor ungefähr sechs Jahren hatte ich die Freude KIRCHHOFF in Berlin zu begegnen. Bei dieser Gelegenheit stellte ich ihm meine Bitte, er möge die Acta mathematica mit seiner Collaboration beehren. KIRCHHOFF, der schon zu der Zeit von der Krankheit litt, die ihn ins frühzeitige Grab führte, bedauerte, nichts Anderes vorräthig zu haben, als den von uns hier gedruckten Aufsatz, der schon vor vielen Jahren von ihm verfasst worden war. Da Prof. C. NEUMANN in Leipzig denselben Gegenstand schon behandelt hatte, so zweifelte doch KIRCHHOFF an der Zweckmässigkeit, seine Arbeit zu veröffentlichen. Er übergab mir indessen das Recht, über die Abhandlung nach meinem eigenen Wunsche zu verfügen.

Ich fühle es jetzt als eine Pflicht, diese wissenschaftliche Leistung des grossen Physikers nicht in Vergessenheit verweilen zu lassen. Jede von ihm geschriebene Zeile hat unzweifelhaft ihren Werth.

SOPHIE KOWALEVSKI.

von ds, oder vielmehr von einem Punkte, der unendlich nahe an ds liegt, n ein unendlich kleines Stück der nach dem Innern des betrachteten Raumes gerichteten Normale von ds, V eine Funktion des Ortes von P, die definirt ist durch die Gleichung

$$V = \frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}(U + U_1 + U_2 + \ldots),$$

wo $U_1, U_2, \ldots$ auf gewisse Weise als Funktionen des Ortes von ds so bestimmt werden sollen, dass ihre Summe eine convergente Reihe bildet.

Wenn der Punkt P durch ein Element hindurchgeht, so ändert sich V sprungweise; es sollen V_i und V_a die Werthe von V auf der inneren und der äusseren Seite von ds bezeichnen; dann ist

$$V_i - V_a = U + U_1 + U_2 + \ldots.$$

Wenn es nun gelänge die Grössen $U_1, U_2, \ldots$ so zu bestimmen, dass

$$- V_a = U_1 + U_2 + \ldots$$

wäre, so würde hieraus

$$V_i = U$$

folgen und es würde V für Punkte im Innern des betrachteten Raumes das gesuchte Potential sein. Die genannte Forderung ist aber erfüllt, wenn man

$$U_1 = -\frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U,$$

$$U_2 = -\frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

setzt und dabei der Anfangspunkt von r *ausserhalb* der Oberfläche, unendlich nahe an dem Punkte wählt, auf den die Zeichen $U_1, U_2, \ldots$ links von den Gleichheitszeichen sich beziehn.

Zu beweisen ist noch, dass bei diesen Festsetzungen die Reihe

$U + U_1 + U_2 + \ldots$ convergirt. Zu diesem Zwecke soll nachgewiesen werden, dass wenn h eine ganze Zahl bedeutet und M_h den grössten, N_h den kleinsten unter allen Werthen von U_h, alle Werthe von U_{h+1} zwischen

$$\frac{M_h - N_h}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{M_h - N_h}{2}$$

liegen.

Bei dem Beweise dieser Behauptung hat man zu benutzen, dass

$$ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

die scheinbare Grösse des Elementes ds von dem Anfangspunkte, P, von r aus gesehn, negativ oder positiv genommen ist, je nachdem die von P durch ds gezogene Linie bei ds in den betrachteten Raum hinein oder aus ihm hinaus tritt. Liegt P ausserhalb dieses Raumes, und denkt man sich einen Kegel, der seine Spitze in P hat und die Oberfläche berührt, so theilt die Berührungslinie die Oberfläche in zwei Theile, von denen der eine die Elemente enthält für die $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ negativ ist, die andere diejenigen, für die $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ positiv ist. Über den letzten ausgedehnt, sei das Integral

$$\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \theta;$$

über den ersten ausgedehnt ist es dann $= -\theta$. Ist, wie vorausgesetzt, die Oberfläche überall convex, so kann θ den Werth 2π nicht überschreiten, es nähert sich dieser Grenze aber bis auf unendlich Kleines, wenn P der Oberfläche unendlich nahe kommt. Bei beliebiger Lage von P ist θ gleich der Öffnung des genannten Kegels und dieser Kegel geht in eine Ebene über, wenn P an die Oberfläche heranrückt.

Wenn man in dem Ausdrucke, welcher den Werth von U_{h+1} angiebt, in demjenigen Theile, in dem $-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ positiv ist, M_h für U_h und in dem-

jenigen, in dem $-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ negativ ist, N_h für U_h setzt, so vergrössert man seinen Werth; der veränderte Werth ist aber, wenn P ein beliebiger äusserer Punkt ist,

$$\frac{\theta}{4\pi}(M_h - N_h)$$

und, wenn P der Oberfläche unendlich nahe ist,

$$\frac{1}{2}(M_h - N_h).$$

Es folgt daraus

$$U_{h+1} < \frac{M_h - N_h}{2}.$$

Eine analoge Betrachtung ergiebt offenbar

$$U_{h+1} > -\frac{M_h - N_h}{2};$$

damit ist die Richtigkeit der obigen Behauptung dargethan.

Es kann hiernach M_{h+1} nicht grösser als $\frac{M_h - N_h}{2}$ und N_{h+1} nicht kleiner als $-\frac{M_h - N_h}{2}$ sein; es können diese Grenzen aber erreicht werden. Damit M_{h+1} gleich $\frac{M_h - N_h}{2}$ werde, muss U_h in einem unendlich kleinen Theile der Oberfläche, in dem der Punkt liegt, für den $U_{h+1} = M_{h+1}$ ist, $= M_h$, in allen übrigen Punkten der Oberfläche aber $= N_h$ sein. Nur in dem Falle, dass ein endlicher Theil der Oberfläche, in dem der Punkt liegt auf den M_{h+1} sich bezieht, eine Ebene ist, findet eine Ausnahme hiervon in so fern statt, als für alle Punkte dieses Theiles, die in endlicher Entfernung von jenem Punkte sich befinden, U_h beliebige Werthe haben kann. Damit $N_{h+1} = -\frac{M_h - N_h}{2}$ werde, muss U_h in einem unendlich kleinen Theile der Oberfläche, in dem der Punkt liegt, für den $U_{h+1} = N_{h+1}$ ist, $= N_h$, in allen übrigen Punkten der Oberfläche $= M_h$ sein. (Ausnahme die der vorher genannten analog ist.) Diesen beiden Bedingungen kann gleichzeitig nicht genügt werden, auch nicht bis auf unendlich kleine Abweichungen; eine der beiden Grössen M_{h+1}, N_{h+1} muss daher von ihrer

Grenze oder beide müssen von ihren Grenzen um Endliches abweichen; in jedem Falle muss also $M_{h+1} - N_{h+1}$ um etwas endliches kleiner sein als $M_h - N_h$. Da diese beiden Differenzen positiv sind, so muss es hiernach eine von der Gestalt der Oberfläche abhängige Grösse ε geben, die ein positiver echter Bruch und um etwas Endliches kleiner als 1 ist, die die Eigenschaft hat, dass

$$M_{h+1} - N_{h+1} \quad \text{zwischen o und} \quad \varepsilon(M_h - N_h)$$

liegt.[1]

Nennt man M den grössten, N den kleinsten der gegebenen Werthe von U, so liegt hiernach

$$M_h - N_h \quad \text{zwischen o und} \quad \varepsilon^h(M - N)$$

und also

$$U_{h+1} \quad \text{zwischen} \quad \pm \varepsilon^h \frac{M - N}{2}.$$

Auf bekannte Weise folgt hieraus die Convergenz der Reihe

$$U + U_1 + U_2 + \ldots .$$

---

[1] Es könnte scheinen, als ob ε, ausser von der Gestalt der Oberfläche, auch von den Werthen von M_h und N_h abhänge. Dem ist aber nicht so, wie man leicht einsicht. Wenn man nämlich U_h durch $\alpha U_h + \beta$, wo α, β Constanten bedeuten, ersetzte, so würde auch U_{h+1} in $\alpha U_{h+1} + \beta$ übergehen; es würde also

$$\frac{M_{h+1} - N_{h+1}}{M_h - N_h}$$

ungeändert bleiben. Dadurch aber dass man über die Constanten α und β passend verfügt, kann man M_h und N_h auf beliebig gegebene Werthe reduzieren.

Der Redaktions-Sekretär. (E. PHRAGMÉN.)

ON A FUNICULAR SOLUTION OF BUFFON'S "PROBLEM OF THE NEEDLE" IN ITS MOST GENERAL FORM

BY

J. J. SYLVESTER
in OXFORD.

Assisted by JAMES HAMMOND.

— »quaintly made of cords»
(Two Gentlemen of Verona, act III, sc. 1.)

The founder of the theory of Local Probability appears to have been BUFFON (better known as a Naturalist, but who began his career as a Mathematician). Among a few other questions of a similar kind, which he proposed in his *Essai d'Arithmétique Morale,* the one which has obtained the greatest notoriety is the celebrated one which goes by the name of the *Problème de l'Aiguille,* the purport of which is a follows.

On an area of indefinite extent (say a planked floor) a number of parallel straight lines are ruled at equal distances, upon which a needle, not long enough to cross more than one of the parallels at the same time, is thrown down: the probability is required of its falling in such a position as to be intersected by one of the parallels.

An easier question of the same kind, which BUFFON treats before the other, is when a circle is used instead of the needle. This latter question he solves by simple geometrical considerations too obvious to need recapitulation; to obtain a solution of the former he, and after him LAPLACE, had recourse to a process of integration.

In a question given in the late Mr TODHUNTER's *Integral Calculus* (1st edition, 1857, p. 268) the solution of the problem is correctly stated for an ellipse, whose major axis is less than the distance between two conse-

cutive parallels, instead of for a circle or straight line: this important step in the development of the theory is, I am informed, currently attributed to the late M[r] LESLIE ELLIS, of the University of Cambridge.

In the year 1860, LAMÉ proposed to give a course of lectures on the subject at the Sorbonne, and, apparently without knowledge of the result contained in TODHUNTER's treatise, reproduced the solution for the ellipse and for any equilateral polygon. In the same year M. EMILE BARBIER, whose lamented decease occured in the course of the present year and who had attended LAMÉ's lectures, discovered and published in the Journal of LIOUVILLE for that year a universal solution for an undivided plane contour of any form whatever.

The subsequent history I am not able to trace further than to state that in CZUBER's *Geometrische Wahrscheinlichkeiten* (Leipzig, 1884) BARBIER's solution is extended to the case of any two rigidly connected convex figures (in a plane).[1] I propose to give here the finishing stroke to the theory as regards plane figures by extending it to any number of them, rigidly connected and of any forms, in the same plane. It is always to be understood, in what precedes as in what follows, that the greatest diameter of the figure, or system of figures, is less than the distance between two consecutive parallels.

BARBIER's principle (see CZUBER, pp. 117, 125) leads at once to the conclusion that the probability of any figure (subject to the restriction above stated) intersecting the system of parallels is to certainty as the length of a cord stretched round the figure is to the circumference of a circle touched by two adjoining parallels.[2] This circumference (with a view to simplicity of expression) we shall adopt as the unit of length in all subsequent formulae.

By the disjunctive probability of a set of figures I shall understand the probability of *one or more* of them intersecting one of the parallels: by the conjunctive probability of the same, the probability of *all* of them intersecting one of the parallels.

I start from BARBIER's theorem that for a single figure the proba-

[1] See *Postscriptum*, p. 205.

[2] The case of a straight line (the original question of the *needle*) may be made to fall under this rule: for the line, as BARBIER has observed, may be regarded as an indefinitely narrow ellipse or other oval.

bility of intersection is measured by the length of a stretched string passing round it: this, it should be observed, is universally true whether the contour be curvilinear or rectilinear or mixtilinear, composed of a single line straight or curved or of any number of such — a theorem almost unexampled for its generality. The disjunctive probability for any number of figures $A, B, C, \ldots, H$ I shall for the present denote by $A:B:C:\ldots:H$, the conjunctive by $A.B.C\ldots H$.

Let there be $n+1$ figures given, let p_i be the sum of the conjunctive and ϖ_i of the disjunctive probabilities for these figures taken i and i together; so that ϖ_1 and p_1 are identical, and ϖ_{n+1}, p_{n+1} are monomial quantities. Then by a universal theorem of *logic* we have the reciprocal formulae

$$(1) \qquad \varpi_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (-)^{i+1} p_i,$$

$$(2) \qquad p_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (-)^{i+1} \varpi_i.$$

Let us now suppose that we have obtained expressions for the disjunctive and conjunctive probabilities of any number not exceeding n figures of any kind: we may extend these to the case of $n+1$ figures as follows.

1°. When the $n+1$ figures are so situated that it is impossible for all of them to be cut by the same straight line, we have $p_{n+1} = 0$ so that ϖ_{n+1} can be found immediately in terms of $p_1, p_2, \ldots, p_n$ by using formula (1), or in terms of $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ by using (2); i. e. ϖ_{n+1} can be found in terms of known quantities; for by hypothesis all the terms of p_i or of ϖ_i are known when i is any number not exceeding n.

2°. When all the $n+1$ figures are capable of being cut by the same straight line, let XY be some straight line which cuts them all and call the figures taken in the order in which they are cut by XY

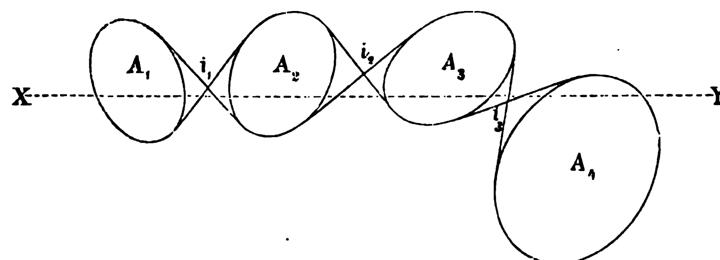
$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}.^{1}$$

---

[1] It may be well to draw at once attention to the fact that different systems of straight lines do not necessarily cut the figures $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in the same order; as ex. gr. if three circles touch, or so nearly touch one another that each blocks the channel between the other two, straight lines may be drawn whose intersections with *any* one of the three shall be intermediate to their intersections with the other two.

Let a stretched string be made to wind round these $n+1$ contours passing alternately from one side of XY to the other, as in Fig. 1, and crossing itself in the n points $i_1, i_2, \ldots, i_n$ lying between A_1, A_2; A_2',

Fig. 1.



A_3; ... A_n, A_{n+1} respectively. Let us call the figures enclosed by the successive $n+1$ *loops* of the winding string

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{n+1}.$$

It is obvious that any straight line which cuts all these loops will cut all the given figures, and *vice versâ*.

Hence

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots A_{n+1} = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \ldots B_{n+1}.$$

Let P_i, Π_i represent what p_i, ϖ_i become when for the figures A we substitute the loops B, so that

$$\Pi_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (-)^{i+1} P_i,$$

$$P_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (-)^{i+1} \Pi_i,$$

and

$$P_{n+1} = p_{n+1}.$$

Π_{n+1} is known by BARBIER's rule, because the loops taken together form a single figure, in fact

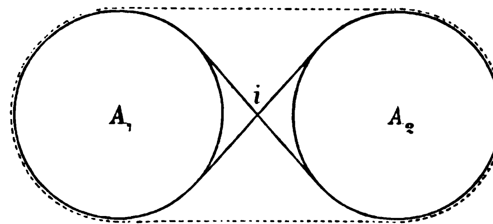
$$\Pi_{n+1} = L,$$

where L is the length of the uncrossed string stretched round the system of figures B, which is no other than that stretched round the given

figures A. Also, by hypothesis, Π_i is known for all values of i not exceeding n. We therefore know p_{n+1} which is the same as P_{n+1}. Hence ϖ_{n+1} is known from (1): thus then p_{n+1} and ϖ_{n+1} are both known, so that when the conjunctive and disjunctive probabilities are known in general for n figures they become known for $n+1$ figures; but when $n = 1$, p_1 and ϖ_1 are equal to one another and to the length of a given stretched string. Hence, by the usual process of induction, we may conclude that the conjunctive and disjunctive probabilities for any number of figures can always be expressed as a linear function with positive and negative integer coefficients, or in a word as a Diophantine linear function, of a finite number of lengths of certain stretched strings.

When there are only *two* figures A_1, A_2 we pass a stretched string between them crossing itself in i (see Fig. 2): then using $(A_1 \chi A_2)$ to denote the length of this string, and $(A_1 A_2)$ to denote the length of the uncrossed string (indicated by dots in the figure) stretched round A_1, A_2 we have

Fig. 2.



$$\Pi_2 = (A_1 \chi A_2) - P_2$$

and

$$\varpi_2 = (A_1) + (A_2) - p_2$$

(where $(A_1), (A_2)$ denote the lengths of the separate bands round A_1, A_2 respectively).

But

$$\Pi_2 = (A_1 A_2),$$

and consequently

$$p_2 = P_2 = (A_1 \chi A_2) - (A_1 A_2),$$

$$\varpi_2 = (A_1) + (A_2) + (A_1 A_2) - (A_1 \chi A_2).$$

We will now proceed to consider in detail the application of the inductive method to the case of *three* figures for which, since each of these may be replaced by a convex band passing round it, we may if we please for greater graphical simplicity substitute three convexes (i. e. contours which any secant must intersect in exactly 2 points). Many cases requiring separate discussion will arise, but one important consequence, rising to the dignity of a principle, which holds good whatever may be the number of figures, governs them all; viz. that the final result for either probability is a linear homogeneous function of lengths of stretched bands drawn in various ways round the given figures and depending for their course on the forms and disposition of these figures exclusively, *wholly uninfluenced* by the presence of any points external to them. Lines drawn from the pointed ends, or apices, of the loops enclosing them do it is true make their appearance in the computations but either coalesce into portions of the bands referred to or else entering in pairs with opposite algebraical signs disappear from the final result. As a consequence, if for the sake of illustration we suppose the figures to be any closed *curves* without singular points, the probability, disjunctive or conjunctive, to be ascertained is a function exclusively of the complete system of lengths of double tangents that can be drawn between the curves and of the arcs into which they are severally divided by their points of contact with those tangents.

We have for all the cases of three figures

$$\varpi_3 - p_1 - p_2 + p_3$$

where

$$p_1 = (A_1) + (A_2) + (A_3)$$

and

$$p_2 = (A_2 \chi A_3) - (A_2 A_3) + (A_3 \chi A_1) - (A_3 A_1) + (A_1 \chi A_2) - (A_1 A_2).$$

Thus

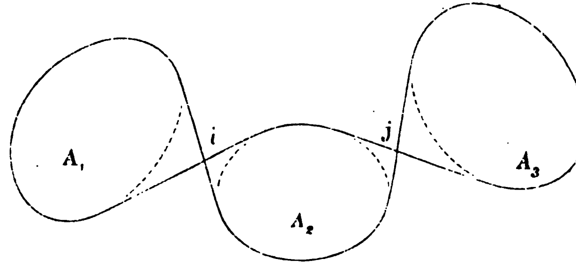
$$(3) \qquad \varpi_3 - p_3 = (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_2 A_3) + (A_3 A_1) + (A_1 A_2) - (A_2 \chi A_3) - (A_3 \chi A_1) - (A_1 \chi A_2).$$

Similarly

$$\Pi_3 - P_3 = (B_1) + (B_2) + (B_3) + (B_2 B_3) + (B_3 B_1) + (B_1 B_2) - (B_2 \chi B_3) - (B_3 \chi B_1) - (B_1 \chi B_2),$$

where B_1, B_2, B_3 are the loops of the string which passes round the figures A_1, A_2, A_3 and crosses itself at i and j, as shown in Fig. 3. But $P_3 = p_3$, and Π_3 is the length of an uncrossed band stretched round the entire system of figures A_1, A_2, A_3 (which will be expressed in symbols by writing $\Pi_3 = (A_1 A_2 A_3)$).

Fig. 3.



Hence

$$p_3 = (A_1 A_2 A_3) + (B_2 \chi B_3) + (B_3 \chi B_1)$$
$$+ (B_1 \chi B_2) - (B_1) - (B_2) - (B_3) - (B_2 B_3) - (B_3 B_1) - (B_1 B_2).$$

Moreover

$$(B_1 \chi B_2) = (B_1) + (B_2)$$

and

$$(B_2 \chi B_3) = (B_2) + (B_3),$$

because B_1, B_2 and B_2, B_3 are pairs of consecutive loops. And whenever the three given figures are capable of being cut by a straight line in the order A_1, A_2, A_3 (i. e. except in the case $p_3 = 0$, which is separately considered)

$$(B_3 B_1) = (A_3 A_1),$$

because both the crossing points, i and j, of the looped string necessarily fall inside the uncrossed band round A_1, A_3. Thus the value of p_3 is given by the equation

$$(4) \quad p_3 = (A_1 A_2 A_3) - (A_1 A_3) + (B_3 \chi B_1) + (B_2) - (B_2 B_3) - (B_1 B_2)$$

which, for immediate purposes, we shall find convenient to write under the form

$$(5) \quad p_3 = (A_1 A_2 A_3) - (A_1 A_3) + (B_2 \chi B_3) - (B_2 B_3) + (B_3 \chi B_1) - (B_1 B_2) - (B_3).$$

We shall apply the formula to the two classes which between them comprise all the cases of three figures, viz.

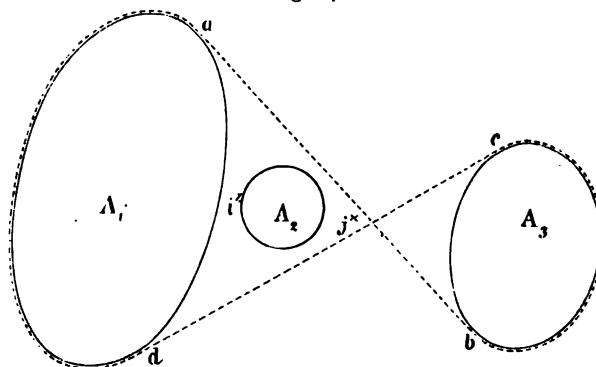
Class A. One of the figures, which we call A_2, lies either wholly or partially inside the crossed band round the other two.

Class B. Each figure lies entirely outside the crossed band round the other two.

In Class A we recognize 3 species, viz.

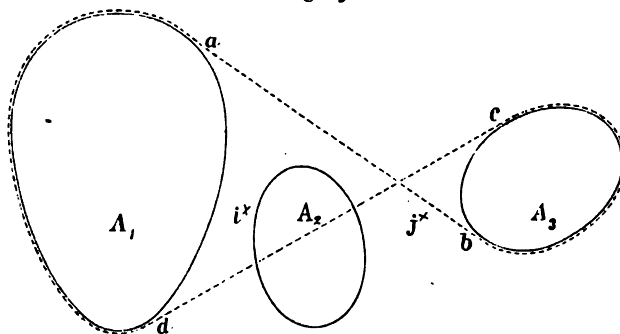
Aa. The figure A_2 does not cut either of the crossed strings ab, cd of the band looped round A_1, A_2 (Fig. 4), but lies wholly in the same loop as one of them, which we call A_1.

Fig. 4.



Ab. The figure A_2 cuts one, but not both, of the crossed strings ab, cd (Fig. 5), and part of it lies in the same loop as A_1.

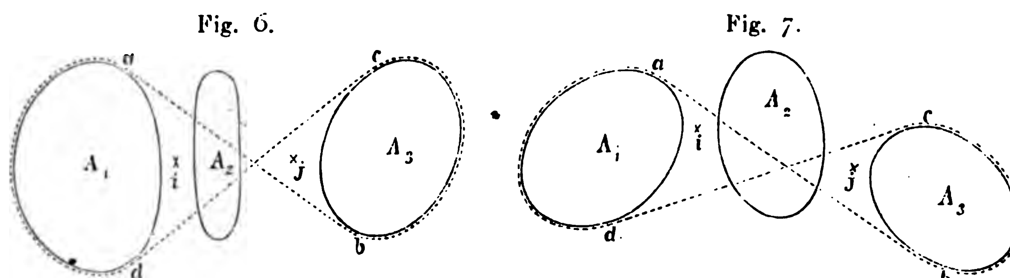
Fig. 5.



Ac. The figure A_2 cuts both the crossed strings ab, cd (Fig. 6 and 7) and part of it lies in the same loop as A_1.

To avoid complicating these figures (4, 5, 6, 7) the band (looped round A_1, A_2, A_3 as shown in Fig. 3) which crosses itself at i, j is not given, but the position of each crossing point is marked by a small cross. It should be observed that in Fig. 5 (species Ab) j lies outside the crossed band round A_1, A_3; in Fig. 4 (species Aa) i and j lie in the same loop, and in Figs. 6, 7 (species Ac) i and j lie in opposite loops of the crossed band round $A_1 A_3$.

Fig. 6. Fig. 7.



The discussion of species Aa is very simple; for it is clear that the conjunctive probability is

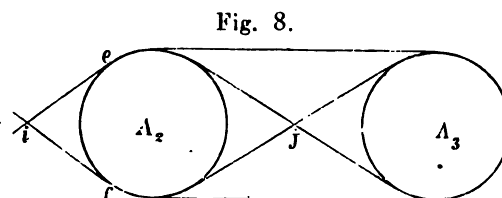
$$p_3 = (A_2 \times A_3) - (A_2 A_3)$$

since it is obviously impossible for a straight line to cut A_2 and A_3 without cutting A_1. Substituting this value for p_3 in formula (3) we obtain the disjunctive probability

$$\varpi_3 = (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_1 A_2) + (A_1 A_3) - (A_1 \times A_2) - (A_1 \times A_3).$$

The remaining two species belonging to class A may be discussed simultaneously; for we have in all the cases (see Fig. 8), using e, f to denote the points of contact with the figure A_2 of the strings which cross at the point i (between A_1 and A_2),

Fig. 8.



$$(B_2 \times B_3) = (A_2 \times A_3) + fi + ie - ef,$$

$$(B_2 B_3) = (A_2 A_3) + fi + ie - ef,$$

so that

$$(B_2 \chi B_3) - (B_2 B_3) = (A_2 \chi A_3) - (A_2 A_3).$$

Hence, for all the species of class A, formula (5) becomes

$$p_3 = (A_1 A_2 A_3) - (A_1 A_3) + (A_2 \chi A_3) - (A_2 A_3) + (B_1 \chi B_3) - (B_1 B_2) - (B_3).$$

In reducing the last three terms of this expression to a form which involves the lengths of bands round the A's, a slight difference arises between species Ab (in which, see Fig. 5, the point j and the figure A_1 are on the same side of the string ab) and species Ac (in which j and A_1 are on opposite sides of the string ab, see Figs. 6 and 7).

Thus, for species Ac, the crossed band round B_1, B_3 will not encounter either of the points i, j, but will be identical with the crossed band ($abcda$, Figs. 6 and 7) round A_1, A_3; i. e.

$$(B_3 \chi B_1) = (A_3 \chi A_1).$$

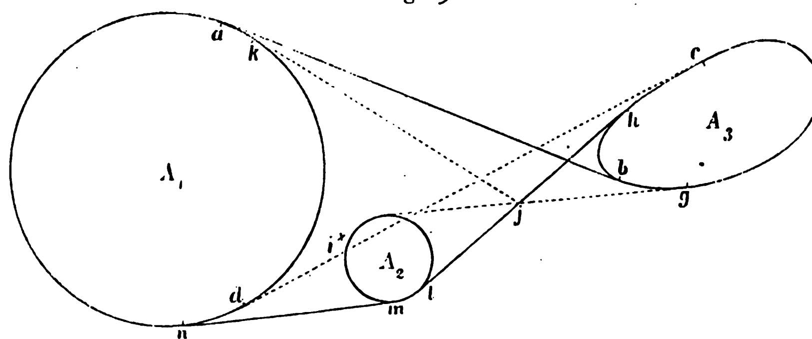
Moreover, a moments reflexion will show that the uncrossed band round B_1, B_2 will combine with the loop B_3 so as to form a single band: in fact we have

$$(B_1 B_2) + (B_3) = D,$$

where D is the crossed band round A_1, A_3 with the loop which contains A_1 distended until it also contains A_2.

But in species Ab (see Fig. 9), let the points of contact with A_3 of

Fig. 9.



the strings which cross at j (between A_2, A_3) be g, h; and let a string jk, in contact with A_1 at k, be stretched from j to the figure A_1: then

$$(B_1 \chi B_3) = (A_1 \chi A_3) + gj + jk + ka - ab - bg$$

and

$$(B_1 B_2) + (B_3) = D + gj + jk + ka - ab - bg,$$

where D is the band $(abgchjlmna)$, derived from the crossed band $(abgcdna)$ round A_1, A_3 by distending the loop which contains A_1 until it also contains A_2.

Hence

$$(B_1 \chi B_3) - (B_1 B_2) - (B_3) = (A_1 \chi A_3) - D,$$

and the general formula for the conjunctive probability (for class A) becomes

$$(6) \quad p_3 = (A_1 A_2 A_3) + (A_1 \chi A_3) + (A_2 \chi A_3) - (A_1 A_3) - (A_2 A_3) - D.$$

Combining this with formula (3), which belongs to all cases of three figures we obtain

$$\varpi_3 = (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_1 A_2) + (A_1 A_2 A_3) - (A_1 \chi A_2) - D.$$

The species Aa, Ab, Ac are distinguishable from one another by the difference in shape of the band D belonging to each. Thus in Aa the band D is not distended at all, but is simply $(A_1 \chi A_3)$; in Ab the loop containing A_1 is distended on one side only; and in Ac is distended on both sides (see figures 10 and 11). This difference in shape will be denoted by writing D_1 for D in the general formula when the species is Ab, and D_2 for D when the species is *Ac*.

The dotted bands $(pqjghjlmnp)$

Fig. 10.

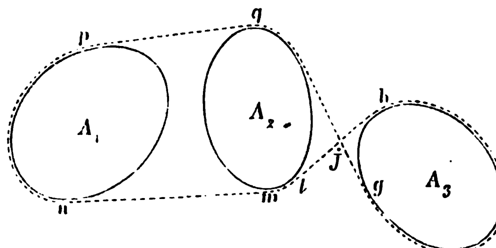
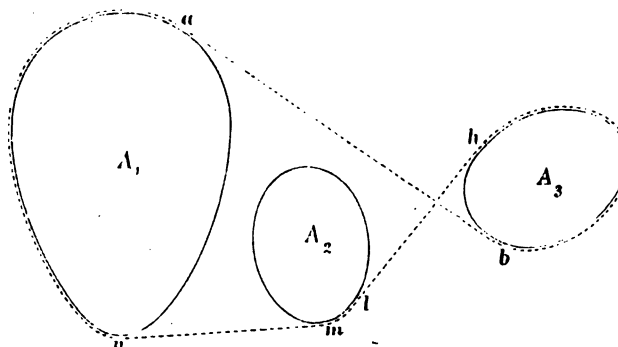


Fig. 11.



of Fig. 10, and ($abhlmna$) of Fig. 11 are what the dotted bands of Fig. 7 (species Ac) and Fig. 5 (species Ab) become, when the former is doubly and the latter singly distended.

Varieties of the species in class A (viz. one variety for Aa, two for Ac, and three for Ac, making 6 cases in all) occur when we consider the situation of the figure A_2 with respect to the uncrossed band round A_1, A_3. In all cases where A_2 lies wholly inside this band we have $(A_1 A_2 A_3) = (A_1 A_3)$, so that in all such cases the general formula (6), which gives the conjunctive probability, becomes

$$p_3 = (A_1 \chi A_3) + (A_2 \chi A_3) - (A_2 A_3) - D.$$

Aa. We have

$$D = (A_1 \chi A_3)$$

so that

$$p_3 = (A_2 \chi A_3) - (A_2 A_3)$$

(the same as the result previously obtained from *à priori* considerations).

Ab. 1. The figure A_2 lies wholly within the uncrossed band round A_1, A_3

$$p_3 = (A_1 \chi A_3) + (A_2 \chi A_3) - (A_2 A_3) - D_1.$$

Ab. 2. The figure A_2 cuts the uncrossed band round A_1, A_3

$$p_3 = (A_1 A_2 A_3) + (A_1 \chi A_3) + (A_2 \chi A_3) - (A_1 A_3) - (A_2 A_3) - D_1.$$

Ac. 1. The figure A_2 lies wholly within the uncrossed band round A_1, A_3.

Ac. 2. The figure A_2 cuts only one string of the uncrossed band round A_1, A_3. In these two cases the formulae which give p_3 are the same as in the corresponding varieties of Ab, except that D_2 takes the place of D_1.

Ac. 3. The figure A_2 cuts both strings of the uncrossed band round A_1, A_3. In this case the formula for the conjunctive probability

$$p_3 = (A_1 A_2 A_3) + (A_1 \chi A_3) + (A_2 \chi A_3) - (A_1 A_3) - (A_2 A_3) - D_2$$

becomes greatly simplified; for (see Fig. 12)

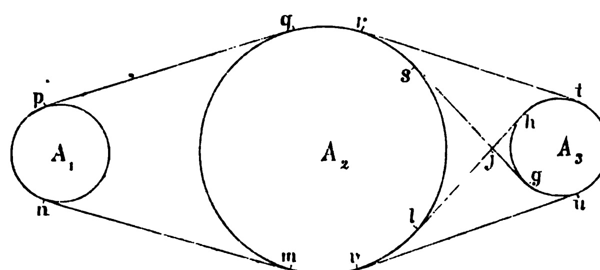
$$D_2 - (A_1 A_2 A_3) = rsjgu + vljht - rt - vu = (A_2 \chi A_3) - (A_2 A_3)$$

so that

$$p_3 = (A_1 \chi A_3) - (A_1 A_3),$$

which is evidently true, since every straight line which cuts both A_1 and A_3 must also (in this case) cut A_2.

Fig. 12.

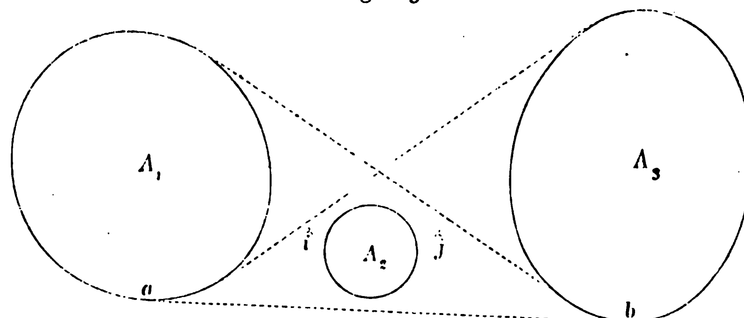


We have now enumerated all the 6 cases of Class A, and given in each case the formula for the conjunctive probability (from which, by means of formula (3), the disjunctive probability may be determined immediately). We proceed to the discussion of Class B.

In Class B (i. e. in the class where each figure lies entirely outside the crossed band round the other two) we recognize 4 species, and in one of them 2 varieties, making 5 cases in all. The enumeration is as follows.

Ba. There is one definite order of succession in which the three figures can be cut by a system of straight lines. There are two varieties of this species, viz.

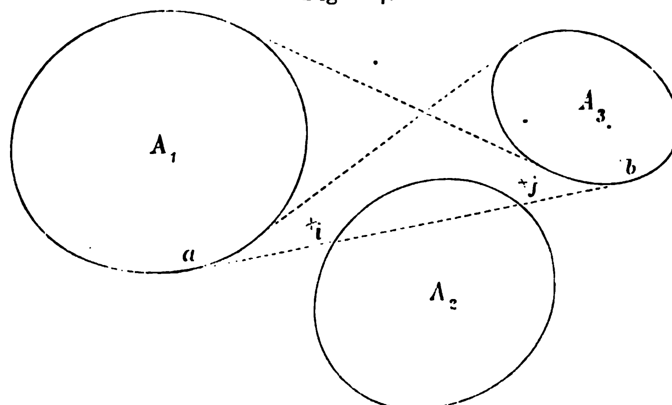
Fig. 13.



Ba. 1 The middle figure (A_2, see Fig. 13) lies wholly inside the

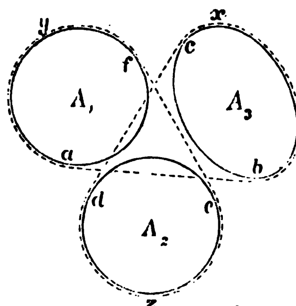
uncrossed band round the other two. The small crosses in this figure, as in others, indicate the positions of the points i, j where the string looped round A_1, A_2, A_3 (see Fig. 3) crosses itself.

Fig. 14.



Ba. 2. The middle figure cuts the uncrossed band round the other two as shown in Fig. 14. In this, as in the preceding case, both i and j lie outside the crossed, but inside the uncrossed, band round A_1, A_3.[1]

Fig. 15.



Bb. The figures may be cut in two different orders by two distinct systems of straight lines (see Fig 15). One system of straight lines cuts the figures in the order A_1, A_2, A_3; the other system cuts them in the order A_3, A_1, A_2.

[1] This circumstance enables us to discuss Ba. 1 and Ba. 2 simultaneously.

Bc. The figures may be cut by three distinct systems of straight lines (Fig. 16).

Bd. The three figures cannot all be cut by any straight line (Fig. 17).

Fig. 16.

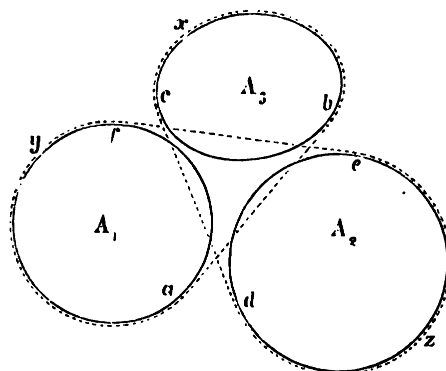
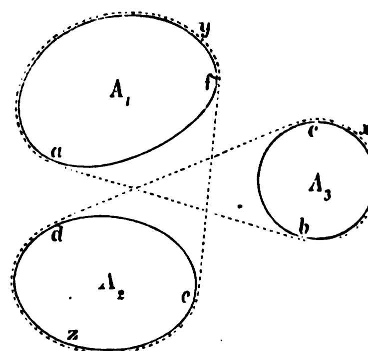


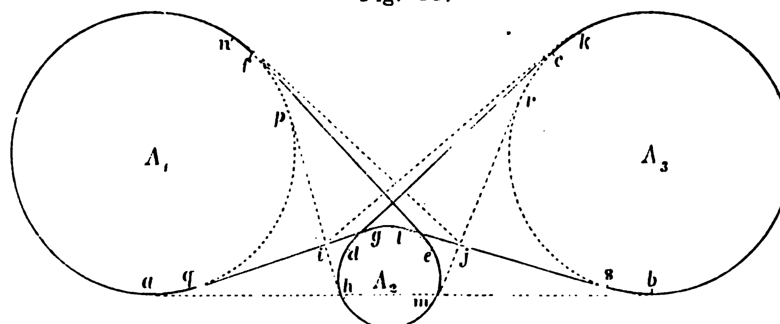
Fig. 17.



In all cases with the exception of Bd, which will be treated separately, we have (see formula 4 *ante*)

$$p_3 = (A_1 A_2 A_3) - (A_1 A_3) + (B_1 \chi B_3) + (B_2) - (B_2 B_3) - (B_1 B_2).$$

Fig. 18.



In Ba (see Fig. 18) we have

$$(B_2 B_3) = (A_2 A_3) + hi + ik - kc - cd - dh,$$

$$(B_1 B_2) = (A_1 A_2) + mj + jn - nf - fe - em,$$

$$(B_1 \chi B_3) = (B_1) + (B_3) + ik - kc - cr - rj + jn - nf - fp - pi.$$

Substituting these values in the general expression for p_3, we obtain

$$p_3 = (A_1 A_2 A_3) - (A_2 A_3) - (A_3 A_1) - (A_1 A_2)$$
$$+ (B_1) + (B_2) + (B_3) - mr - rc + cd + dh - hp - pf + fe + em$$

where the term $-mr$ comes from $-mj - rj$, and the term $-hp$ comes from $-hi - pi$; the other terms involving the points i, j or the points of contact k, n of tangents drawn from them to the original figures disappear in pairs. The terms

$$(B_1) + (B_2) + (B_3) - mr - rc + cd + dh - hp - pf + fe + em$$

will be seen to coalesce into a single band (whose course is marked in Fig. 18 by the continuous line ***aqigljsbkcdhmefna***, all other lines in the figure being dotted). This band we shall call Δ_1.

Fig. 18 is drawn for the case Ba. 2, but the investigation of case Ba. 1 is precisely the same as that of Ba. 2. In both cases we find

$$p_3 = (A_1 A_2 A_3) - (A_2 A_3) - (A_3 A_1) - (A_1 A_2) + \Delta_1$$

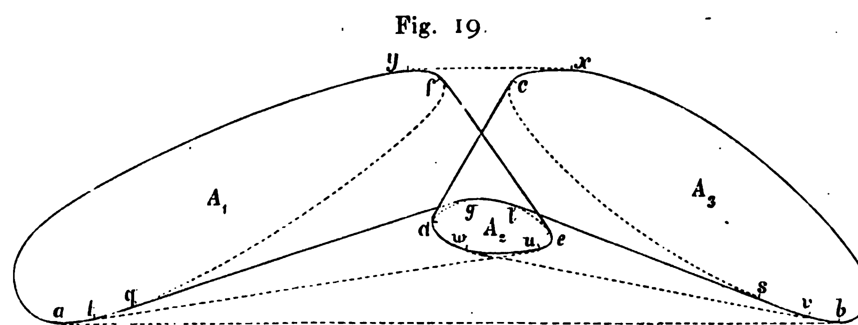
for the conjunctive probability, and consequently

$$\varpi_3 = (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_1 A_2 A_3) - (A_2 \times A_3) - (A_3 \times A_1) - (A_1 \times A_2) + \Delta_1$$

gives the disjunctive probability in both cases.

The band Δ_1 for the case Ba. 1 is shown by the continuous line

Fig. 19.



of Fig. 19, i. e. Δ_1 is the band *atqglsvbxcdwuefya*: its course is precisely the same as that of the Δ_1 for the case Ba. 2.

The difference between the two cases is this: in Ba. 1 we have

$$(A_1A_2A_3) = (A_1A_3)$$

so that

$$p_3 = \varDelta_1 - (A_1A_2) - (A_2A_3),^1$$

whereas in Ba. 2 (and in all the cases to be subsequently considered) the terms $(A_2A_3) + (A_3A_1) + (A_1A_2) - (A_1A_2A_3)$ coalesce into a single band which we shall call $\varDelta$, so that

$$p_3 = \varDelta_1 - \varDelta.$$

The course of the band $\varDelta$ is marked by the letters *abkcdhmefna* in Fig. 18. The band $\varDelta_1$ may be derived from $\varDelta$ by supposing its rectilinear portion *ab* to be pressed inwards by the figure A_2 so as to occupy the position *aqglsb*.

The investigation of the case Bb proceeds on exactly the same lines as that of Ba. 2; we start from the same general formula and, by performing precisely similar work, obtain the result

$$p_3 = \varDelta_2 - \varDelta,$$

where (see Fig. 15) $\varDelta$ is the band *abxcdzefya* whose course is indicated by dots, and $\varDelta_2$ is the band derived from $\varDelta$ by supposing *two* of its rectilinear portions *ab*, *cd* to be pressed inwards by the figures A_1 and A_2.

In the case Bc (Fig. 16) the work is simplified by observing that each of the figures A_1, A_2, A_3 blocks the channel between the other two (i. e. no straight line can pass between any two of them without cutting the third). Hence every straight line which cuts the uncrossed band round all the figures must cut one or more of them; i. e.

$$\varpi_3 = (A_1A_2A_3)$$

[1] By an easy rearrangement of the bands the value of p_3 for this case may be expressed as the difference of the two bands, *atuelgdwvbxya* and *atqgleuwdglsvbxya* (see Fig. 19), derived from the uncrossed band *abxya* round A_1, A_3 by *twisting* its rectilinear portion *ab* right round A_2 in opposite directions.

and consequently formula (3) gives

$$p_3 = (A_1A_2A_3) - (A_2A_3) - (A_3A_1) - (A_1A_2)$$
$$+ (A_2 \chi A_3) + (A_3 \chi A_1) + (A_1 \chi A_2) - (A_1) - (A_2) - (A_3).$$

Now it is easily seen that

$$(A_2A_3) + (A_3A_1) + (A_1A_2) - (A_1A_2A_3) = \varDelta$$

and

$$(A_2 \chi A_3) + (A_3 \chi A_1) + (A_1 \chi A_2) - (A_1) - (A_2) - (A_3) = \varDelta_3$$

where $\varDelta$ is the band *abxcdzefya* (shown by the dotted line in Fig. 16) and $\varDelta_3$ is what $\varDelta$ becomes when its rectilinear portions *ab*, *cd*, *ef* are pressed inwards by the figures A_1, A_2, A_3.

Thus

$$p_3 = \varDelta_3 - \varDelta.$$

The sole remaining case of three figures is Bd (Fig. 17), the case in which no straight line can possibly cut all three figures. In it we have obviously

$$p_3 = 0$$

and therefore

$$\varpi_3 = (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_2A_3) + (A_3A_1)$$
$$+ (A_1A_2) - (A_2 \chi A_3) - (A_3 \chi A_1) - (A_1 \chi A_2).$$

This case forms no exception to the general rule for finding the conjunctive probability in cases belonging to class B.

We have

$$\varDelta = abxcdzefya$$

(i. e. $\varDelta$ is the dotted band of Fig. 17), and since this band is not pressed inwards by any of the figures the conjunctive probability according to the rule would be $\varDelta - \varDelta = 0$, which is right.

Having thus pointed out the general method of procedure, and illustrated it by treating in detail the case of 3 figures, it does not seem

desirable to pursue the subject further in this direction for the present; but, before concluding, it may be worth while to notice that, in the general case of n limited right lines, the probabilities with which we have to do become Diophantine linear functions of the sides of the complete $2n$-gonal figure of which the n pairs of extremities of the lines are the angles. There will be a group of such linear functions depending on the mutual disposition of the n lines, but the number of formulae in any such group will be much greater than in the case of n general figures: for, when we pass from these to indefinitely narrow ovals, the portion of a definite band (appearing in any formula), partially surrounding any one of such ovals, may, according to the mutual disposition of their major axes, have in common with it an infinitesimal arc in some cases, in others an arc (to an infinitesimal *près*) equal to a circumference, and again in others to a semicircumference of the oval; which latter is ultimately the same as the length of the line whose double the complete circumference represents.

By way of illustration let us consider the question of two needles or limited straight lines rigidly connected. Neglecting the limiting cases, where one of the lines terminates in the other, there will remain 3 hypotheses:

A. The lines intersect.

B. The lines tend to intersect in a point external to each of them.

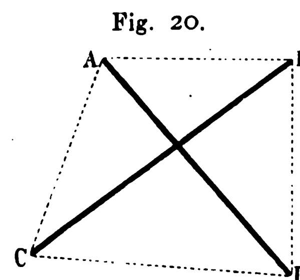
C. One of the lines tends towards a point lying within the other.

Let p_2 denote the chance of both the needles AB, CD being cut by one of the parallels, ϖ_2 the chance of one or other of them being cut: then we have the general formulae

$$\varpi_2 = 2AB + 2CD - p_2$$

$p_2 =$ difference between the crossed and uncrossed bands round AB, CD applicable to all cases.

Fig. 20.

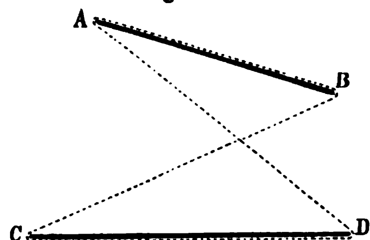


A. When the lines intersect

$$\varpi_2 = AD + DB + BC + CA,$$

$$p_2 = 2AB + 2CD - AD - DB - BC - CA.$$

Fig. 21.

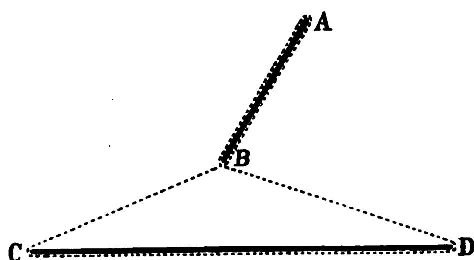


B. When the lines tend to intersect in a point external to each of them

$$p_2 = (AB + BC + CD + DA) - (AB + BD + DC + CA) = BC - CA + AD - DB,$$[1]

$$\varpi_2 = 2AB + 2CD - BC + CA - AD + DB.$$

Fig. 22.



C. When one of the lines tends towards a point lying within the other

$$p_2 = (2AB + BC + CD + DB) - (AC + CD + DA) = 2AB + BC - CA - AD + DB,$$

$$\varpi_2 = 2CD - BC + CA + AD - DB.$$

The complexity of cases for 3 right lines is such as would require a separate study even to obtain a perfect enumeration of them; consequently I shall leave it to others to pursue the subject further whether as regards principles or details. I will only add that the ascertainment of the general law that the formulae contain no other arguments than lengths of tight endless bands variously drawn round the given contours appears to me a distinct step achieved in the prosecution of this extensive Theory, and one that is far from being obvious à priori. Buffon's problem of the needle, it will be seen, has now expanded into a problem of n needles rigidly connected, which may be treated as a corollary to that of *n entirely separate* general contours, the mode of solution of which, it is believed, has been sufficiently indicated in the investigations which form the subject of this memoir.

New College, Oxford, Jan. 22nd, 1890.

---

[1] Imagine a string passing from B to C, from C to A, from A to D, and from D to B. This string cannot be kept tight unless fastened by pins at A, B, C, D. Inserting the necessary pins and tightening the string, we agree to consider the consecutive portions of the string as alternately positive and negative.

On these suppositions p_2 is the algebraical length of the band $BCADB$ stretched round the pins. The method of representation by means of pinned bands may by extended to the case of two (or any number of) general figures.

Postscriptum.

Since the above was set up in print my attention has been called to the fact that the extension of BARBIER's theorem referred to on p. 186 is due to Prof^r CROFTON and is given by him in his celebrated paper on the *Theory of Local Probability* contained in the Philosophical Transactions for 1868. Strange to say, no reference to this, so far as I can find, is made in CZUBER's treatise. It is the more singular that I should have overlooked the fact inasmuch as it was an outcome of conversations with myself, when Prof^r CROFTON was serving under me in the Royal Military Academy at Woolwich, that he was put upon the track of investigations in local probability in which he has since earned for himself so great and well merited celebrity. It may be added that Prof^r CROFTON seems to have written in entire ignorance of BARBIER's discovery as he makes no allusion to it in his paper.

It is indeed a romantic incident in mathematical history that BUFFON's problem of the needle should have led up (as is undoubtedly the case) to CROFTON's new and striking theorems in the integral calculus reproduced in BERTRAND's *Calcul intégral.*

J. J. S.

ÜBER DIE ACHT SCHNITTPUNKTE DREIER OBERFLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG.

Auszug eines Schreibens an Herrn H. G. Zeuthen

VON

H. SCHROETER
in BRESLAU.

.... Der schöne Satz, welchen Sie kürzlich im Anschluss an eine Arbeit des Herrn DOBRINER in den Acta mathematica, Bd. 12, mitgetheilt haben und der gegenüber der HESSEschen Darstellung eine vollkommene Symmetrie liefert für eine Gruppe von acht associirten Punkten findet sich implicite ausgesprochen in einer Arbeit von A. BUCHHEIM: *An extension of Pascal's theorem to space of three dimensions* (Messenger, (2) Vol. 14, 74—75). Die Arbeit selbst habe ich nicht nachsehen können, weil sie auf der hiesigen Bibliothek nicht vorhanden ist; wohl aber findet sich in den »Fortschritten der Mathematik», Bd. 16, S. 576, folgendes Referat:

> »Wenn ein Achteck einer cubischen Raumkurve einbeschrieben ist, so sind die Schnitte der Gegenflächen die Erzeugenden eines Hyperboloids; d. h. also, nennt man die Ecken des Achtecks 12345678 und bezeichnet durch 123 die Ebene durch die Punkte 1, 2, 3, so sind die vier Linien (123, 567)(234, 678)(345, 781)(456, 812) die Erzeugenden eines Hyperboloids.» Glr. (Lp.)

Der Beweis, welchen ich mir vor mehreren Jahren von diesem Satze gemacht habe, setzt nichts weiter voraus, als dass durch die acht gegebenen Punkte sich Hyperboloide legen lassen, gilt also ebensowohl für

acht Punkte einer Raumkurve dritter Ordnung, wie für eine Gruppe von acht associirten Punkten. Gestatten Sie mir, Ihnen denselben mitzutheilen:

Wenn acht Punkte des Raumes $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ eine Gruppe von acht associirten Punkten bilden, also jede Oberfläche zweiter Ordnung, die durch sieben derselben geht, auch den achten enthalten muss, so wird ein Hyperboloid, welches die Geraden $|12|$ $|67|$ zu Erzeugenden hat und durch die Punkte $3, 4, 5$ geht, auch den Punkt 8 enthalten, also findet die Projectivität der beiden Ebenenbüschel statt:

$$|12|(3458) \overline{\wedge} |67|(3458).$$

Schneidet man die beiden projectiven Ebenenbüschel mit der Ebene [345], so erhält man zwei projective Strahlenbüschel, die einen Kegelschnitt erzeugen; auf diesem liegen die sechs Punkte:

$$3, 4, 5, \quad (12, 345) = \mathfrak{O}, \quad (67, 345) = \mathfrak{O}_1, \quad (128, 678, 345) = \mathfrak{P}$$

und bilden ein Pascal'sches Sechseck:

$$345\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}\mathfrak{O},$$

bei dem die drei Schnittpunkte der Gegenseiten

$$(34, \mathfrak{O}_1\mathfrak{P}), \ (45, \mathfrak{O}\mathfrak{P}), \ (5\mathfrak{O}_1, 3\mathfrak{O})$$

auf einer Geraden g liegen.

Diese drei Punkte der Geraden g lassen sich nun anders ausdrücken, denn es ist offenbar

$$|\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}| \equiv |345, 678|, \quad |\mathfrak{O}\mathfrak{P}| \equiv |345, 812|,$$
$$|5\mathfrak{O}_1| \equiv |345, 567|, \quad |3\mathfrak{O}| \equiv |123, 345|,$$
$$(3\mathfrak{O}, 5\mathfrak{O}_1) \equiv (123, 345, 567),$$

$$(34, \mathfrak{O}_1\mathfrak{P}) \equiv (34, 678), \quad (45, \mathfrak{O}\mathfrak{P}) \equiv (45, 812);$$

also liegen diese drei Punkte

$$\mathfrak{z}_1 = (123, 345, 567),$$
$$\mathfrak{z}_2 = (34, 678),$$
$$\mathfrak{z}_4 = (45, 812)$$

auf der Geraden g.

Bezeichnen wir nun die vier Schnittlinien:

$$\begin{cases} l_1 = |123, 567|, \\ l_2 = |234, 678|, \\ l_3 = |345, 781|, \\ l_4 = |456, 812|, \end{cases}$$

so ist ersichtlich, dass g der Geraden l_1 begegnen muss, weil $\mathfrak{z}_1$ in g liegt und gleichzeitig in l_1; ferner begegnet g der Geraden l_2, weil $\mathfrak{z}_2$ in beiden Geraden liegt; g begegnet auch der Geraden l_4 weil $\mathfrak{z}_4$ in beiden Geraden liegt, und endlich begegnet g auch der Geraden l_3, weil beide in derselben Ebene [345] liegen; also begegnet g allen vier Geraden $l_1 l_2 l_3 l_4$ gleichzeitig. Auf dieselbe Weise, wie wir die Gerade g gefunden haben, können wir weitere Gerade derselben Eigenschaft finden, indem wir von einem andern durch die acht Punkte gelegten Hyperboloid oder von einer anderen aus demselben entspringenden Projectivität ausgehen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass wir die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 cyclisch fortschreiten lassen, also als zweite Projectivität wählen

$$23\,|(4561) \;\overline{\wedge}\; 78\,|(4561).$$

Dadurch erhalten wir eine neue Gerade g'; die vier Geraden $l_1 l_2 l_3 l_4$ gehen aber durch cyclisches Fortschreiten in einander über, bleiben also *dieselben;* wir können demgemäss acht Gerade g angeben, welche gleichzeitig den vieren $l_1 l_2 l_3 l_4$ begegnen, woraus denn die hyperboloidische Lage der vier Geraden $l_1 l_2 l_3 l_4$ d. h. Ihr Satz folgt.

Breslau im September 1889.

ÜBER BESTÄNDIG CONVERGIRENDE POTENZREIHEN

MIT RATIONALEN ZAHLENCOEFFICIENTEN UND VORGESCHRIEBENEN NULLSTELLEN

VON

A. HURWITZ
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Den Quotienten zweier reeller ganzen Zahlen bezeichne ich im Folgenden als *reelle* rationale Zahl und verstehe unter einer rationalen Zahl schlechthin jede Grösse $a + bi$, deren Componenten a und b reelle rationale Zahlen sind.

Es sei irgend eine Potenzreihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

gegeben. Dann kann man stets, und zwar auf unendlich viele Weisen, eine beständig convergirende Potenzreihe $g(x)$ *so bestimmen, dass die Entwicklung des Produktes*

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(x) \, . \, e^{g(x)} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots$$

lauter rationale Coefficienten besitzt. Wenn in's besondere die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *von* $\mathfrak{P}(x)$ *reell sind, so kann man die Bestimmung von* $g(x)$ *so treffen, dass die Coefficienten* $r_0, r_1, r_2, \ldots$ *reelle rationale Zahlen werden.*

Zum Beweise dieses Satzes nehme man eine unendliche Reihe positiver Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ an, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Potenzreihe

$$(3) \qquad \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3 x^3 + \ldots$$

beständig convergirt. Sodann entwickle man $\log \mathfrak{P}(x)$ in der Form:

(4) $$\log \mathfrak{P}(x) = s \log x + \log a_s + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots,$$

wo a_s den ersten nicht verschwindenden Coefficienten $a_0, a_1, a_2 \dots$ bezeichnet. Endlich setze man, für $n = 1, 2, 3, \dots,$

(5) $$\alpha_n = \rho_n - \beta_n,$$

indem man die rationale Zahl ρ_n so bestimmt, dass der absolute Betrag von β_n kleiner als ε_n, also in Zeichen:

(6) $$|\beta_n| < \varepsilon_n$$

wird. Diese Bestimmung ist stets möglich, da in jeder noch so kleinen Umgebung von α_n unendlich viele rationale Zahlen vorhanden sind. Nunmehr wird die Reihe

(7) $$g(x) = -\log a_s + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$$

die gewünschten Eigenschaften besitzen. Denn einerseits zeigt der Vergleich mit der Reihe (3) auf Grund der Ungleichung (6), dass $g(x)$ beständig convergirt. Andererseits ist

$$\log \mathfrak{P}(x) + g(x) = s \log x + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots$$

und folglich

$$\mathfrak{P}(x) \,.\, e^{g(x)} = x^s \,.\, e^{\rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots}$$

$$= x^s \left[1 + (\rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots) + \frac{1}{\underline{|2}} (\rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots)^2 + \dots\right].$$

Die Entwicklung der rechten Seite dieser Gleichung nach aufsteigenden Potenzen von x liefert aber lauter rationale Zahlencoefficienten, da $\rho_1, \rho_2, \dots$ rationale Zahlen sind. Wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ reelle Coefficienten besitzt, so werden auch $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ reelle Zahlen sein. Man kann dann offenbar ρ_n als *reelle* rationale Zahlen wählen, so dass auch die Potenzentwicklung von $\mathfrak{P}(x) \,.\, e^{g(x)}$ *reelle* rationale Zahlencoefficienten erhält.

Aus dem vorstehend bewiesenen Satze lassen sich einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Es sei gegeben eine Reihe von Grössen

(8) $$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass

(9) $$\lim_{n=\infty} a_n = \infty$$

ist, falls die Reihe (8) nicht abbricht. Nach einem Satze des Herrn WEIERSTRASS[1] kann man dann auf mannigfaltige Weise eine beständig convergirende Potenzreihe herstellen, welche die Grössen (8) und nur diese zu Nullstellen hat. Bezeichnet $\mathfrak{P}_1(x)$ irgend eine solche Potenzreihe so sind alle übrigen in der Form

(10) $$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(x) \,.\, e^{G(x)}$$

enthalten, wo $G(x)$ eine beliebige beständig convergirende Potenzreihe bedeutet. Wenn die Reihe (8) in sich übergeht, falls jede Grösse a_m durch ihren conjugirt imaginären Werth ersetzt wird, so darf man voraussetzen, dass $\mathfrak{P}_1(x)$ reelle Coefficienten besitzt. Denn andernfalls sei $\overline{\mathfrak{P}}_1(x)$ die Reihe, welche entsteht, wenn man jeden Coefficienten von $\mathfrak{P}_1(x)$ durch seinen conjugirten Werth ersetzt. Dann ist $\mathfrak{P}_2(x) = \sqrt{\mathfrak{P}_1(x)\,\overline{\mathfrak{P}}_1(x)}$ eine Potenzreihe mit reellen Coefficienten, welche an Stelle von $\mathfrak{P}_1(x)$ gesetzt werden kann.

Auf Grund des oben Bewiesenen können wir nun den Satz aussprechen:

Wenn eine Reihe von Grössen (8) *gegeben ist, so kann man auf mannigfaltige Weise eine beständig convergirende Potenzreihe herstellen, welche die Grössen* (8) *und nur diese zu Nullstellen hat und welche überdies rationale Zahlencoefficienten besitzt. Falls die Reihe* (8) *in sich übergeht, wenn man jede in ihr enthaltene Grösse durch deren conjugirt-imaginären Werth ersetzt, so kann man jene Potenzreihe derart bestimmen, dass sie reelle Coefficienten erhält.*

Wie eine leichte Überlegung zeigt, erhält man die allgemeinste Potenzreihe von der im Satze genannten Beschaffenheit aus einer bestimmten $\mathfrak{P}_1(x)$ vermöge der Gleichung

(11) $$\mathfrak{P}(x) = c \,.\, \mathfrak{P}_1(x) \,.\, e^{xh(x)},$$

[1] *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1876. Wieder abgedruckt in den *Abhandlungen aus der Functionenlehre.* Berlin 1886.

wo c irgend eine rationale Zahl und $h(x)$ irgend eine beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen Coefficienten bedeutet.

Der besondere Fall, in welchem die Reihe (8) aus einer einzigen Zahl a besteht, ergiebt den Satz:

Jede beliebige (reelle oder complexe) Zahl a ist Wurzel einer Gleichung

$$0 = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \dots,$$

deren rechte Seite eine beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen (reellen bez. complexen) Coefficienten darstellt und welche ausser der Zahl a keine weitere Wurzel besitzt.»

Sei $\mathfrak{P}(x)$ eine beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen Coefficienten, und sei $a_1, a_2, a_3, \dots$ die Reihe ihrer Nullstellen. Die letzteren mögen willkürlich in n Gruppen $G_1, G_2, \dots G_n$ zerlegt werden. Nach dem Vorhergehenden ist es dann möglich $n-1$ beständig convergirende Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x), \dots \mathfrak{P}_{n-1}(x)$ mit rationalen Coefficienten herzustellen derart, dass $\mathfrak{P}_r(x)$ für die in die Gruppe G_r aufgenommenen Stellen und nur für diese verschwindet. Der Quotient aus $\mathfrak{P}(x)$ und dem Produkte $\mathfrak{P}_1(x) \cdot \mathfrak{P}_2(x) \dots \mathfrak{P}_{n-1}(x)$ lässt sich dann als beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}_n(x)$ mit rationalen Coefficienten darstellen, und es wird $\mathfrak{P}_n(x)$ für die in G_n enthaltenen Stellen und nur für diese verschwinden. Hieraus folgt:

Jede beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen Coefficienten lässt sich als Produkt von n ebensolchen Reihen darstellen derart, dass sich die Nullstellen der ersteren Reihe in beliebig vorgeschriebener Weise auf die n Factoren vertheilen.

Ins besondere kann man also die linke Seite einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten auflösen in ein Produkt von n beständig convergirenden Potenzreihen mit ebenfalls rationalen Coefficienten, von welchen jede einzelne für je eine Wurzel jener Gleichung verschwindet.

Aus den vorstehenden Sätzen geht hervor, dass im Gebiete der beständig convergirenden Potenzreihen mit rationalen Coefficienten eine un-

beschränkte Zerlegbarkeit stattfindet, und dass also in diesem Gebiete der Begriff der Irreducibilität keine Stelle findet.[1]

Schliesslich erwähne ich noch folgenden Satz, dessen Beweis nach den eingangs angestellten Betrachtungen keine Schwierigkeit bietet:

Jede beständig convergirende Potenzreihe mit beliebigen Coefficienten kann dargestellt werden als Produkt von unendlich vielen beständig convergirenden Potenzreihen mit rationalen Coefficienten, von welchen jede einzelne an einer oder an keiner Stelle verschwindet.

Königsberg i. Pr. 10. März 1889.

---

[1] Vgl. E. STRAUSS: *Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung.* Acta Mathematica, Bd. 11, S. 13.

ÜBER DIE
DIOPHANTISCHEN GLEICHUNGEN VOM GESCHLECHT NULL

VON

D. HILBERT UND A. HURWITZ
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Die vorliegende Mittheilung behandelt die Aufgabe, alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

zu finden, unter der Voraussetzung, dass $f(x_1, x_2, x_3)$ eine ganze ganzzahlige homogene Function vom n^{ten} Grade in den Variabeln x_1, x_2, x_3 bedeutet, und die durch jene Gleichung definirte ebene Curve das Geschlecht Null besitzt. Die Frage nach allen denjenigen Punkten der Curve (1), deren Coordinaten rationale Zahlen sind, bezeichnet offenbar im wesentlichen die gleiche Aufgabe.

Zur Lösung der Aufgabe stützen wir uns auf die Abhandlung von M. NÖTHER: *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen.*[1] Den dort entwickelten Resultaten zufolge können wir zunächst, falls die Gleichung (1) vorgelegt ist, durch eine endliche Zahl von rationalen Operationen entscheiden, ob die Voraussetzung, dass das Geschlecht der Gleichung Null ist, zutrifft. Sodann ist es ebenfalls durch rationale Operationen möglich, $n - 1$ linear unabhängige ternäre ganzzahlige Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ von der $(n - 2)^{ten}$ Ordnung an-

[1] Mathematische Annalen, Bd. 23, S. 311 ff.

zugeben derart, dass für beliebige Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ die Curve (1) von der Curve

$$(2) \qquad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\varphi_{n-1} = 0$$

in $n-2$ mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ veränderlichen Punkten geschnitten wird. Die Gleichung (2) stellt die zu der Curve (1) adjungirten Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung dar.

Es sei nun zur Abkürzung

$$(3) \qquad \begin{cases} \Phi_1 = \lambda_{11}\varphi_1 + \lambda_{12}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{1,n-1}\varphi_{n-1}, \\ \Phi_2 = \lambda_{21}\varphi_1 + \lambda_{22}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{2,n-1}\varphi_{n-1}, \\ \Phi_3 = \lambda_{31}\varphi_1 + \lambda_{32}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{3,n-1}\varphi_{n-1}, \end{cases}$$

wobei $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{3,n-1}$ unbestimmte Parameter bedeuten. Transformiren wir sodann die Gleichung (1) vermöge der Formeln

$$(4) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3,$$

so erhalten wir eine Gleichung

$$(5) \qquad g(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

deren linke Seite eine ganzzahlige Form von y_1, y_2, y_3 und den Parametern $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{3,n-1}$ ist. Ferner ergiebt die Ausführung der Transformation Formeln der Gestalt

$$(6) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3,$$

wo Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 ebenfalls ganzzahlige Formen von y_1, y_2, y_3 und den Parametern $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{3,n-1}$ sind. Wir setzen diese Formen ohne einen allen gemeinsamen Theiler voraus. Die Form $g(y_1, y_2, y_3)$ ist nothwendig irreducibel und homogen von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung in den Variabeln y_1, y_2, y_3, eine Thatsache, welche unmittelbar aus den bekannten Sätzen über die rationalen eindeutig umkehrbaren Transformationen der algebraischen Curven folgt. Wir ertheilen jetzt den Parametern $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{3,n-1}$ solche ganzzahligen Werthe, dass die Form $g(y_1, y_2, y_3)$ irreducibel bleibt. Dies ist stets möglich, da diejenigen Werthe von $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{3,n-1}$, für

welche $g(y_1, y_2, y_3)$ reducibel wird, gewissen algebraischen Gleichungen genügen müssen. Vermöge der Formeln (4) und (6) entspricht nunmehr jedem Punkte der Curve (1), dessen Coordinaten rationale Zahlen sind, ein ebensolcher Punkt der Curve (5) und umgekehrt. Daher ist unsere ursprüngliche Aufgabe auf die Behandlung der Gleichung $g(y_1, y_2, y_3) = 0$ zurückgeführt, welche ebenfalls ganzzahlig und vom Geschlechte Null ist, dagegen einen um zwei Einheiten geringeren Grad als $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ besitzt.

Da die Fortsetzung dieses Verfahrens so lange möglich ist, als der Grad der Gleichung grösser ist als drei, so gelangen wir schliesslich zu einer Gleichung dritten oder zweiten Grades, je nachdem der Grad n der ursprünglichen Gleichung eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Eine Gleichung dritten Grades können wir aber sofort auf eine Gleichung ersten Grades reduciren. Denn eine solche Gleichung stellt eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehr-Punkte vor, dessen Coordinaten nothwendig rationale Zahlen sind, und diese Curve kann stets vermöge einer rationalen eindeutig umkehrbaren Transformation in eine gerade Linie übergeführt werden. Je nachdem also die Ordnung der vorgelegten Gleichung eine ungerade oder eine gerade Zahl ist, erhalten wir schliesslich eine Gleichung ersten oder zweiten Grades. Wir behandeln diese beiden Fälle gesondert.

Im ersteren Falle sei

$$l(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{7}$$

die erhaltene lineare Gleichung. Es lassen sich dann offenbar drei ganzzahlige lineare Formen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ der homogenen Parameter t_1, t_2 von der Art angeben, dass die Proportion

$$u_1 : u_2 : u_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 \tag{8}$$

alle rationalen Lösungen der linearen Gleichung (7) liefert, wenn wir für die Parameter t_1, t_2 alle möglichen ganzen Zahlen einsetzen. Indem wir nun durch successive Anwendung der vorhin ausgeführten Transformationen zu der ursprünglich vorgelegten Gleichung (1) zurückgehen, ergiebt sich eine Proportion von der Gestalt

$$x_1 : x_2 : x_3 = \rho_1 : \rho_2 : \rho_3, \tag{9}$$

wo ρ_1, ρ_2, ρ_3 ganzzahlige Formen n^{ter} Ordnung der homogenen Variabeln t_1, t_2 bedeuten. Nach eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl von Lösungen, welche wir als singuläre Lösungen bezeichnen und auf welche wir sogleich zurückkommen werden, findet man aus der Proportion (9) alle übrigen, nicht-singulären rationalen Lösungen der Gleichung (1), wenn man den Parametern t_1, t_2 alle möglichen ganzzahligen Werthe ertheilt. Es ist daher offenbar, dass wir alle nicht-singulären ganzzahligen eigentlichen Lösungen x_1, x_2, x_3 unserer Gleichung (1) erhalten, wenn wir in ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Parameter t_1, t_2 alle möglichen Paare relativer Primzahlen annehmen lassen, und immer den grössten allen drei Zahlen gemeinsamen Theiler unterdrücken. Um jedoch zu bestimmten Formeln für diese eigentlichen Lösungen zu gelangen, bilden wir die Resultante der beiden Formen

$$\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \lambda_3\rho_3\,,\quad \mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 + \mu_3\rho_3\,,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ unbestimmte Parameter bedeuten. Diese Resultante ist eine ganze ganzzahlige Function der Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, welche nicht identisch verschwinden kann, da die Formen ρ_1, ρ_2, ρ_3 keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Es sei R die grösste positive ganze Zahl, welche in sämmtlichen Coefficienten jener Function aufgeht. Bedeutet dann t_1, t_2 irgend ein Paar relativer Primzahlen, so ist leicht einzusehen, dass jede in den drei Zahlen

$$\rho_1(t_1, t_2)\,,\quad \rho_2(t_1, t_2)\,,\quad \rho_3(t_1, t_2)$$

aufgehende Zahl ein Theiler von R sein muss. Lassen wir daher die beiden Parameter t_1 und t_2 unabhängig von einander ein vollständiges Restsystem nach dem Modul R durchlaufen, so gelangen wir durch eine einfache Schlussweise zu folgendem Resultat:

Es lässt sich ein endliches System von Formeln:

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1(\tau_1, \tau_2), & x_2 = \alpha_2(\tau_1, \tau_2), & x_3 = \alpha_3(\tau_1, \tau_2); \\ x_1 = \beta_1(\tau_1, \tau_2), & x_2 = \beta_2(\tau_1, \tau_2), & x_3 = \beta_3(\tau_1, \tau_2); \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 = \varkappa_1(\tau_1, \tau_2), & x_2 = \varkappa_2(\tau_1, \tau_2), & x_3 = \varkappa_3(\tau_1, \tau_2), \end{cases}$$

aufstellen, welches alle nicht-singulären ganzzahligen eigentlichen Lösungen

der Gleichung (1) liefert, wenn man den Parametern τ_1, τ_2 alle möglichen ganzzahligen Werthe beilegt. Dabei bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, x_1, x_2, x_3$ ganze, ganzzahlige, nicht homogene Functionen der Parameter τ_1, τ_2.

Die bisherigen Entwicklungen beruhten wesentlich auf dem Umstande, dass die benutzten Transformationen eindeutig umkehrbar sind. Da diese Eindeutigkeit jedoch in den singulären Punkten der Curve (1) eine Ausnahme erfährt, so bedürfen diese Punkte noch einer besonderen Untersuchung. Die singulären Punkte entsprechen den gemeinsamen Lösungen der drei Gleichungen

$$(11) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

und es kann daher stets durch eine endliche Anzahl rationaler Operationen entschieden werden, ob unter ihnen solche vorhanden sind, deren Coordinaten rationale Werthe besitzen. Die so gefundenen »singulären« Lösungen der diophantischen Gleichung (1) werden nicht nothwendig auch durch die Formeln (10) erhalten, wie sich leicht durch Beispiele zeigen lässt.

Wenn zweitens der Grad n der vorgelegten Gleichung eine gerade Zahl ist, so werden wir, wie oben gezeigt worden ist, auf eine quadratische Gleichung

$$(12) \qquad q(u_1, u_2, u_3) = 0$$

geführt. Wir können dann diese Gleichung stets durch eine lineare Transformation mit rationalen Zahlencoefficienten in die Gestalt

$$(13) \qquad a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0$$

bringen, wo a_1, a_2, a_3 sämmtlich ohne einen quadratischen Theiler und paarweise relative Primzahlen sind. Bekanntlich besitzt diese Gleichung (13) ganzzahlige Lösungen dann und nur dann, wenn a_1, a_2, a_3 nicht alle dasselbe Vorzeichen haben, und die Zahlen $-a_2 a_3, -a_3 a_1, -a_1 a_2$ beziehungsweise quadratische Reste der Zahlen a_1, a_2, a_3 sind.[1]

[1] LEGENDRE: *Théorie des nombres*, 3me éd. T. I. §§ III, IV. (Deutsch von H. MASER, Leipzig 1886.) Vgl. auch LEJEUNE-DIRICHLET: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausgegeben von R. DEDEKIND, 3. Aufl. § 157 des X. Supplementes.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so giebt es auf dem durch die Gleichung (13) definirten Kegelschnitte Punkte, deren Coordinaten rational sind, und wir können daher durch eine rationale eindeutig umkehrbare Transformation den Kegelschnitt in eine Gerade, oder, was dasselbe ist, die Gleichung (13) in eine lineare Gleichung überführen. An die letztere knüpfen sich sodann dieselben Betrachtungen, welche wir oben im Anschluss an die Gleichung (7) entwickelten. Es wird also auch in dem jetzt betrachteten Falle unsere diophantische Gleichung (1) eine unendliche Zahl von Lösungen besitzen, welche durch ein System von Formeln der Gestalt (10) gefunden werden, und zu welchen sich eventuell eine endliche Zahl von singulären Lösungen gesellt.

Sind jedoch die genannten Bedingungen nicht erfüllt, so besitzt der Kegelschnitt (13) keinen Punkt, dessen Coordinaten rationale Zahlen sind. Folglich giebt es dann auch auf der Curve (1) keinen solchen Punkt, es sei denn, dass von den singulären Punkten dieser Curve einer oder mehrere rationale Coordinaten besitzen. Unsere Gleichung (1) hat also jetzt entweder eine endliche Zahl von (singulären) Lösungen oder überhaupt keine Lösung, je nachdem die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

gemeinsame rationale Lösungen zulassen oder nicht. Dass von diesen beiden Möglichkeiten auch die erstere eintreten kann, dass also ein singulärer Punkt der Curve (1) rationale Coordinaten besitzen kann, ohne dass ein weiterer Punkt mit rationalen Coordinaten auf der Curve liegt, zeigt folgendes Beispiel. Es seien φ, ψ_1, ψ_2, ψ_3 vier ganzzahlige quadratische Formen, ferner l eine ganzzahlige lineare Form der Variabeln u_1, u_2, u_3. Diese Formen mögen so gewählt werden, dass der durch die Gleichung

$$(14) \qquad \varphi = 0$$

definirte Kegelschnitt keinen Punkt mit rationalen Coordinaten besitzt, dass ferner die Kegelschnitte

$$(15) \qquad \psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0$$

durch die beiden Schnittpunkte von $\varphi = 0$ mit der Geraden $l = 0$ hindurchgehen, ohne mit $\varphi = 0$ zu demselben Büschel zu gehören, und dass endlich der Kegelschnitt

$$(16) \qquad \psi_3 = 0$$

die genannten beiden Schnittpunkte nicht enthält. Offenbar können die Formen auf unendlich viele Weisen diesen Bedingungen gemäss angenommen werden. Transformiren wir nun die Gleichung (14) vermöge der Formeln

$$(17) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 ,$$

so erhalten wir eine ganzzahlige Gleichung

$$(18) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

welche eine Curve vierter Ordnung vom Geschlechte Null darstellt. Den Schnittpunkten der Geraden $l = 0$ mit dem Kegelschnitt $\varphi = 0$ entspricht ein Doppelpunkt dieser Curve vierter Ordnung, dessen Coordinaten die rationalen Werte

$$\frac{x_1}{x_3} = 0, \qquad \frac{x_2}{x_3} = 0$$

besitzen. Dagegen kann sich unter den nicht-singulären Punkten der Curve (18) keiner mit rationalen Coordinaten finden, weil einem solchen auf dem Kegelschnitt (14) ein Punkt mit ebenfalls rationalen Coordinaten entsprechen würde. Durch zweckmässige Wahl der Form ψ_3 kann man, wie wir noch bemerken wollen, nach Belieben erreichen, dass entweder nur einer oder dass jeder der singulären Punkte der Curve (18) rationale Coordinaten erhält.

Durch die vorstehende Darlegung findet die diophantische Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

von beliebigem Grade und vom Geschlechte Null ihre vollkommene Erledigung. Wie sich dabei gezeigt hat, *besitzt eine solche Gleichung entweder keine Lösung, oder sie besitzt eine endliche Zahl von Lösungen, welche dann stets die gemeinsamen ganzzahligen Lösungen der Gleichungen* (11) *sind, oder endlich sie besitzt eine unendliche Zahl von Lösungen, welche abgesehen*

von eventuellen gemeinsamen ganzzahligen Lösungen der Gleichungen (11), *durch ein System von Formeln der Gestalt* (10) *gefunden werden.*

Wenn der Grad der Gleichung eine ungerade Zahl ist, so tritt stets der letzte Fall ein. Eine diophantische Gleichung von ungeradem Grade und vom Geschlechte Null besitzt also stets unendlich viele Lösungen.

Königsberg i. Pr. den 14. März 1889.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

PAR

E. PHRAGMÉN
À STOCKHOLM.

La théorie de la représentation conforme des surfaces est, comme on sait, intimement liée à la théorie du problème de Dirichlet. Après que M. WEIERSTRASS eut attiré l'attention sur l'insuffisance de l'argument par lequel RIEMANN avait voulu démontrer la solubilité de ce problème, M. SCHWARZ, dans plusieurs travaux extrêmement remarquables, dont le plus important se trouve dans les Monatsberichte de l'Académie de Berlin, année 1870, a établi d'une manière rigoureuse cette solubilité, du moins dans des cas très étendus, et a mis à profit ce résultat pour la théorie de la représentation conforme. Plus tard, la méthode de M. SCHWARZ a été commentée par plusieurs auteurs, parmi lesquels je tiens à nommer ici HARNACK [1] et M. JULES RIEMANN.[2]

Ces auteurs ont remarqué une difficulté que l'on rencontre en passant du problème de Dirichlet au problème de la représentation conforme. Cette difficulté, qui paraît avoir échappé à M. SCHWARZ, de même qu'à M. SCHOTTKY, dont on a un mémoire étendu sur la représentation conforme des aires à connexion multiple,[3] consiste principalement en ce qui suit. Si l'on a résolu le problème de Dirichlet pour une aire S et une

---

[1] *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales* etc., Leipzig, Teubner, 1887.

[2] *Sur le problème de Dirichlet,* Thèse, Paris 1888.

[3] Journal für Mathematik, t. 83.

suite continue de valeurs données sur son contour s, c'est-à-dire, si on a trouvé une fonction réelle u harmonique[1] en S, qui tend uniformément vers les valeurs données quand on s'approche du contour, on ne sait pas en général, comment la fonction v conjuguée de u se comporte dans le voisinage du contour. HARNACK a fait disparaître cette difficulté dans des cas assez étendus, en démontrant que la fonction v est holomorphe dans le voisinage de tout point situé sur une portion du contour formée d'un arc régulier d'une ligne analytique et où les valeurs données sont définies par une fonction holomorphe. Tout se réduit dans ce cas, comme il est du reste très facile de le voir, à démontrer que toute fonction u, qui est harmonique d'un côté d'une droite et qui s'annule sur la droite, est *continuable* au-delà de la droite. HARNACK énonce ce résultat à la page 15 du livre cité; mais la démonstration qu'il en donne ne me semble pas satisfaisante. Heureusement qu'il est facile de trouver une autre démonstration absolument rigoureuse, et qui a de plus l'avantage d'être très élémentaire. En effet, joignons deux points de la droite s par un arc de cercle c de manière à former un segment de cercle C tel que la fonction u est harmonique à son intérieur et continue sur le contour. Puis menons l'arc de cercle c' symétrique à c par rapport à la droite, et faisons correspondre à chaque point de cet arc la valeur numériquement opposée à la valeur de la fonction u au point symétrique situé sur c. Formons une fonction U qui soit harmonique dans l'aire limitée par les deux arcs de cercle, qui soit égale à u sur c et prenne sur c' les valeurs qui viennent d'être définies. Il n'y a qu'une seule fonction qui satisfait à ces conditions. Par conséquent, si x', y' sont les coordonnées du point symétrique au point (x, y) par rapport à la droite, on a

$$U(x', y') = - U(x, y).$$

Car si on pose

$$V(x, y) = - U(x', y')$$

---

[1] c.-à-d. satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

la fonction $V(x, y)$ satisfait aux mêmes conditions que $U(x, y)$. Sur la droite elle-même, on a donc $U = 0$. Donc les fonctions u et U, étant harmoniques dans le domaine C et s'accordant sur son contour, sont identiques, et le théorème de HARNACK se trouve démontré rigoureusement.

Voici un autre point de la théorie de la représentation conforme qui me parait digne de l'attention des géomètres. M. SCHWARZ a indiqué (loc. cit. pag. 785) une importante généralisation du problème de Dirichlet, dont on n'a pas jusqu'ici, ce me semble, tiré tout le parti possible. Supposons une surface telle que le voisinage de tout point puisse être représenté conformément sur une aire plane.[1] Supposons de plus que, par l'intermédiaire de la représentation conforme, on regarde cette fonction, dans le voisinage d'un point de la surface, comme fonction des points d'une aire plane qui représente d'une manière conforme ce voisinage, et supposons qu'elle soit fonction harmonique dans cette aire plane. Je dirai alors simplement que la fonction est harmonique dans le voisinage du point considéré de la surface. Je dirai de plus qu'une fonction est harmonique dans un domaine quelconque d'une surface, si elle est harmonique dans le voisinage de tout point de ce domaine.

Convenons de généraliser le problème de Dirichlet dans le même sens, et désignons par ce nom le problème qui consiste à trouver une fonction harmonique dans un domaine donné d'une surface et tendant uniformément vers des valeurs données quand on s'approche du contour du domaine. Le procédé de M. SCHWARZ nous permet de dire que ce problème généralisé peut être résolu, pourvu que la suite des valeurs données soit continue, et que le domaine donné puisse être composé d'un nombre fini de domaines représentables conformément sur des aires planes pour lesquelles on sait résoudre le problème le Dirichlet.

Comme on sait, le problème de Dirichlet peut être généralisé dans une autre direction, et l'on peut donner, outre les valeurs sur le contour, certaines conditions de discontinuité. En particulier, si le domaine donné est fermé il n'y a lieu de considérer que les conditions de discontinuité.

---

[1] Il me semble que M. SCHWARZ fait trop peu de cas des difficultés que fait naître en général la présence d'*arêtes* à l'intérieur du domaine considéré (cf. loc. cit. pag. 785).

L'existence de la solution se trouve toujours établie par le procédé alterné de M. SCHWARZ.

On connaît tout le parti qu'on peut tirer de ces théorèmes pour la théorie des intégrales abéliennes, en les appliquant aux surfaces dites de Riemann.[1] Mais il semble avoir échappé à l'attention des géomètres[2] qu'on peut les appliquer tout aussi bien aux polygones générateurs de M. POINCARÉ et que, de cette manière, on peut établir tout d'un coup l'existence des fonctions fuchsiennes et kleinéennes.

En effet, on n'a qu'à se rendre compte de ce qu'il faut entendre par une fonction harmonique dans le voisinage d'un point $z = z_0$ du polygone. Si le point $z = z_0$ est situé à l'intérieur du polygone, il n'y a rien de particulier. S'il est situé sur un côté du polygone, nous conviendrons de compter au voisinage de z_0 les points du polygone qui appartiennent à un petit cercle autour de z_0, et les points dont les points correspondants du polygone limitrophe appartiennent au même cercle, et nous dirons qu'une fonction est harmonique dans le voisinage de z_0 si elle est harmonique à l'intérieur de ce cercle.

Enfin, si le point z_0 est un sommet du polygone, formons des régions limitrophes ayant le même sommet jusqu'à ce que nous ayons un représentant de chaque sommet faisant partie du même cycle que le sommet $z = z_0$. Si la somme de tous les angles du cycle est égale à 2π, nous compterons au voisinage de z_0 l'ensemble des points du polygone appartenant à un petit cercle autour de z_0 ou y ayant des points correspondants, et nous nommerons fonction harmonique dans le voisinage du sommet z_0 toute fonction harmonique dans un tel cercle. Au contraire, si la somme des angles est différente de 2π, le premier et le dernier côté aboutissant au point z_0 seront correspondants. Choisissons sur ces lignes deux points correspondants et joignons-les par un arc de cercle coupant les deux lignes orthogonalement. Il sera facile de représenter le domaine limité par les deux lignes et par l'arc de cercle conformément sur l'intérieur d'un cercle, de telle sorte qu'au sommet z_0 corresponde le centre du cercle et qu'aux deux lignes correspondantes du contour corresponde

[1] Cf. C. NEUMANN, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, Leipzig, Teubner, 1884.

[2] Cf. POINCARÉ, Acta t. 1, p. 294; t. 4, p. 240.

un rayon du cercle. Dans ce cas, une fonction sera dite harmonique dans le voisinage de z_0, si elle devient par cette transformation fonction harmonique à l'intérieur du cercle.

Cela posé, on voit tout de suite que les polygones générateurs de M. Poincaré, considérés comme des surfaces fermées, peuvent être composés, de la manière indiquée par M. Schwarz, d'un nombre fini de domaines pour chacun desquels le problème de Dirichlet est soluble. Donc le problème de Dirichlet, généralisé comme nous venons de le faire, est soluble pour le polygone générateur en entier.

L'existence des fonctions fuchsiennes et kleinéennes est une conséquence immédiate de ce théorème; du reste, on voit facilement que ce n'est pas là le seul point de la théorie de ces transcendantes si remarquables où l'on peut recourir avec profit à la théorie de la représentation conforme.

En parlant de la théorie de la représentation conforme, il convient de dire un mot de la méthode élémentaire par laquelle M. Schläfli a établi la possibilité de la représentation conforme d'un polygone rectiligne donné sur un demi-plan.[1] Cette méthode a été critiquée par M. J. Riemann[2] — à tort, ce me semble. Voici en effet en peu de mots ce qui a été démontré par M. Schläfli.

Partant du fait connu que la fonction

$$P = M\int_0^{\omega} \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}(1-t\omega)^{\delta-1}\ldots(1-y\omega)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

où l'on suppose $M > 0$, $1 > s > t > \ldots > y > z > 0$, représente le demi-plan conformément sur un polygone à n côtés, dont les angles sont

$$\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi, \ldots, \iota\pi, \varkappa\pi,$$

où

$$\varkappa = n - 2 - (\alpha + \beta + \ldots + \iota),$$

---

[1] Journal für Mathematik, t. 78.

[2] loc. cit. p. 47—49.

et dont les longueurs des côtés sont données par les équations

$$(\alpha\beta) = M\int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\dots(1-y\omega)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

$$(\beta\gamma) = M\int_1^{\frac{1}{s}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\dots(1-y\omega)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\theta\iota) = M\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{z}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s\omega-1)^{\gamma-1}\dots(y\omega-1)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

il montre que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial[(\alpha\beta),(\beta\gamma),\dots,(\theta\iota)]}{\partial[M,s,\dots,z]}$$

a la valeur

$$(-M)^{n-3}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\iota)}{\Gamma(1-\varkappa)}\cdot s^{\varkappa+\gamma-2}t^{\varkappa+\delta-2}\dots z^{\varkappa+\iota-2}$$
$$\cdot(1-s)^{\beta+\gamma-2}(1-t)^{\beta+\delta-2}\dots(1-z)^{\beta+\iota-2}$$
$$\cdot(s-t)^{\gamma+\delta-2}\dots(s-z)^{\gamma+\iota-2}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\cdot(y-z)^{\theta+\iota-2}.$$

Par conséquent, si $M, s, t, \dots, z$ ont des valeurs réelles telles que

$$\delta_1 > M > \delta\,,\quad 1-s>\delta\,,\quad s-t>\delta\,,\ \dots,\ y-z>\delta\,,\quad z>\delta,$$

δ et δ_1 étant des quantités positives, les valeurs numériques de ce déterminant sont comprises entre deux valeurs limites positives.

Donnons maintenant à $M, s, t, \dots, z$ des valeurs particulières $M_0, s_0, t_0, \dots, z_0$ satisfaisant aux inégalités

$$M_0 > 0, \qquad 1 > s_0 > t_0 > \dots > z_0 > 0.$$

Nous savons que la fonction correspondante P_0 représente le demi-plan sur un polygone à n côtés

$$(\alpha\beta)_0, (\beta\gamma)_0, \dots, (\theta\iota)_0$$

et aux angles donnés. Soient $(\alpha\beta)_1 \ldots (\theta\iota)_1$ les longueurs des côtés du polygone donné. Il est clair qu'on peut arriver du polygone $(\alpha\beta)_0 \ldots (\theta\iota)_0$ au polygone donné $(\alpha\beta)_1 \ldots (\theta\iota)_1$, en passant par une série continue de polygones à n côtés, par exemple en égalant $(\alpha\beta) \ldots (\theta\iota)$ à n fonctions régulières d'une variable réelle ξ croissant de ξ_0 à ξ_1. Soit ξ_2 une valeur entre ξ_0 et ξ_1. Si cette valeur est assez rapprochée de ξ_0, puisque le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)]}{\partial[M, s, \ldots, z]}$$

est différent de zéro pour $\xi = \xi_0$, on peut déterminer $M, s, \ldots, z$ de manière que $(\alpha\beta) \ldots (\theta\iota)$ prennent les valeurs $(\alpha\beta)_2 \ldots (\theta\iota)_2$ correspondant à ξ_2.

Cela a lieu encore au-delà de ξ_2, si la valeur numérique du déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)]}{\partial[M, s, \ldots, z]}$$

reste comprise entre deux quantités positives pour toutes les valeurs de ξ entre ξ_0 et ξ_2.

Or on peut déterminer à priori deux telles quantités. En effet, parce que tous les côtés des polygones $(\alpha\beta) \ldots (\theta\iota)$ correspondant à des valeurs de ξ entre ξ_0 et ξ_1 sont compris entre des limites positives, s'il y a des valeurs $M, s, t, \ldots, z$ $(1 > s > t > \ldots > z > 0)$ qui y correspondent, il faut que la quantité M soit aussi comprise entre des limites positives et que les différences $1 - s, s - t, \ldots, y - z, z - 0$ soient toutes supérieures à une quantité positive. Car si une ou plusieurs de ces différences s'annulaient, le polygone correspondant n'aurait plus n côtés, et si M s'annulait ou devenait infini, tous les côtés s'annuleraient ou deviendraient infinis. Mais dans ces conditions, la valeur numérique du déterminant fonctionnel est toujours comprise entre deux valeurs positives, comme nous l'avons déjà énoncé plus haut.

Donc la propriété dont nous parlons a lieu jusqu'à et au-delà de $\xi = \xi_1$, et on peut déterminer M et $s, t, \ldots, z$ de telle manière que le demi-plan soit représenté conformément sur le polygone donné à l'aide de la fonction

$$P = M\int_0^\omega \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En terminant ces remarques détachées, tirées d'un cours que j'ai professé à l'université de Stockholm pendant le semestre du printemps 1889, je ne puis me refuser le plaisir d'attirer l'attention du lecteur sur la solution simple et élégante du problème de Dirichlet dans le cas d'un domaine convexe donnée par KIRCHHOFF et publiée dans ce même volume des Acta, p. 179—183. Il est superflu de dire que cette solution, donnée primitivement pour le cas de l'espace, s'applique tout aussi bien au cas de deux dimensions.

LES INVARIANTS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

F. BRIOSCHI

À MILAN.

1. Si l'on transforme une équation différentielle linéaire:

(1) $$y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} p_2 y^{(n-2)} + \ldots + n p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

dans laquelle:

$$y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$$

et $p_2, p_3, \ldots, p_n$ fonctions de x, en posant:

(2) $$y = \rho v,$$

ρ fonction de x, v fonction d'une nouvelle variable z, elle aussi fonction de x, et l'on suppose:

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{n-1}{2} \frac{z''}{z'},$$

la transformée aura la forme:

$$\frac{d^n v}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{2} q_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \ldots + n q_{n-1} \frac{dv}{dz} + q_n v = 0.$$

Soient:

$$\frac{z''}{z'} = Z, \qquad -Z' + \frac{1}{2} Z^2 = P_2, \qquad P_{r+1} = P'_r - rZP_r,$$

on trouve très facilement que les quantités:

$$q_2 z'^2, \; q_3 z'^3, \; \ldots, \; q_n z'^n$$

peuvent s'exprimer en fonction de $p_2, p_3, \ldots, Z, P_2, P_3, \ldots$. On a, par exemple:

$$q_2 z'^2 = p_2 + \frac{n+1}{2.3} P_2,$$

$$q_3 z'^3 = p_3 - 3p_2 Z + \frac{n+1}{4} P_3,$$

$$q_4 z'^4 = p_4 - 6p_3 Z + 9p_2 Z^2 + (n+5)p_2 + \frac{(n+1)(5n+7)}{3.4.5} P_2^2 + \frac{3(n+1)}{2.5} P_4,$$

et ainsi de suite. En différentiant par rapport à x la première de ces relations on a:

$$\frac{dq_2}{dz} z'^3 = p_2' - 2p_2 Z + \frac{n+1}{2.3} P_3$$

et à cause de la seconde:

$$\left[q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz}\right] z'^3 = p_3 - \frac{3}{2} p_2'.$$

L'expression:

$$p_3 - \frac{3}{2} p_2' = a_3 \quad \text{ou encore:} \quad q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz} = \alpha_3$$

a été nommée par Laguerre invariant de l'équation différentielle linéaire.

Une équation différentielle linéaire de l'ordre n a $n-2$ invariants de cette espèce, qu'on peut nommer invariants fondamentaux, parce que les autres, comme on verra dans la suite, se forment avec ceux-ci. Pour chacun d'eux on a:

$$\alpha_r z'^r = a_r,$$

a_r étant fonction de $p_2, p_3, \ldots, p_r$ et de leurs dérivées, et analoguement pour α_r.

M. Forsyth dans son travail *Invariants, Covariants associated with Linear Differential Equations,*[1] a calculé les expressions de a_3, a_4, a_5, a_6, a_7; lesquelles avec de petites modifications de forme sont les suivantes:

---

[1] Philosophical Transactions, Vol. 179, 1888.

$$a_3 = p_3 - \frac{3}{2} p_2',$$

$$a_4 = p_4 - 2p_3' + \frac{6}{5} p_2'' - \frac{3}{5} \frac{5n+7}{n+1} p_2^2.$$

$$a_5 = p_5 - \frac{5}{2} p_4' + \frac{15}{7} p_3'' - \frac{5}{7} p_2''' - \frac{10}{7} \frac{7n+13}{n+1} p_2 a_3,$$

(4)
$$a_6 = p_6 - 3p_5' + \frac{10}{3} p_4'' - \frac{5}{3} p_3''' + \frac{5}{14} p_2^{\text{IV}} - 5 \frac{3n+7}{n+1} p_2 a_4$$
$$- \frac{7n+8}{14(n+1)} (4p_2 p_2'' - 5p_2'^2) - \frac{3}{7} \frac{35n^2 + 112n + 93}{(n+1)^2} p_2^3,$$

$$a_7 = p_7 - \frac{7}{2} p_6' + \frac{105}{22} p_5'' - \frac{35}{11} p_4''' + \frac{35}{33} p_3^{\text{IV}} - \frac{7}{44} p_2^{\text{V}}$$
$$- \frac{21}{11} \frac{11n+31}{n+1} p_2 a_5 - \frac{9}{22} \frac{385n^2 + 1728n + 1919}{(n+1)^2} p_2^2 a_3$$
$$- \frac{3n+4}{11(n+1)} [10p_2 a_3'' - 35p_2' a_3' + 21p_2'' a_3].$$

Le calcul de la partie linéaire d'un invariant quelconque a_r ne présente pas de difficulté; on trouve en effet qu'elle est la suivante:

(5)
$$\sum_s A_{r,s} \left[p_{r-2s}^{(2s)} - \frac{(r-2s)(r-2s-1)}{2(2s+1)(r-s-1)} p_{r-2s-1}^{(2s+1)} \right],$$

où l'on a

$$A_{r,0} = 1, \qquad A_{r,s+1} = \frac{(r-2s-2)(r-2s-1)^2(r-2s)}{4(s+1)(2s+1)(r-s-1)(2r-2s-3)} A_{r,s},$$

et $s = 0, 1, \ldots, \frac{r}{2} - 1$ pour r pair; $s = 0, 1, \ldots, \frac{r-3}{2}$ pour r impair. L'autre partie doit se calculer dans chaque cas; pourtant on peut la rendre moins compliquée de la manière suivante.

2. Soient ξ_1, ξ_2 deux intégrales de l'équation différentielle du second ordre:

$$\xi'' + \frac{3}{n+1} p_2 \xi = 0;$$

en posant:

$$y = \varphi(\xi_1, \xi_2),$$

φ étant une forme de l'ordre $n - 1$ à coefficients constants, on aura l'équation différentielle linéaire suivante, de l'ordre n en y:

$$y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} l_2 y^{(n-1)} + \ldots + n l_{n-1} y' + l_n y = 0, \tag{6}$$

dans laquelle:

$$l_2 = p_2, \qquad l_3 = \frac{3}{2} p_2', \qquad l_4 = \frac{9}{5} p_2'' + \frac{3(5n+7)}{5(n+1)} p_2^2,$$

$$l_5 = 2 p_2''' + \frac{3(5n+7)}{n+1} p_2 p_2',$$

$$l_6 = \frac{15}{7} p_2^{\mathrm{IV}} + \frac{9(21n+29)}{7(n+1)} p_2 p_2'' + \frac{5 \cdot 9}{2 \cdot 7} \frac{7n+10}{n+1} p_2'^2 + \frac{3(35n^2+112n+93)}{7(n+1)^2} p_2^3,$$

$$l_7 = \frac{9}{4} p_2^{\mathrm{V}} + \frac{3(14n+19)}{n+1} p_2 p_2''' + \frac{27(7n+10)}{2(n+1)} p_2' p_2'' + \frac{9(35n^2+112n+93)}{2(n+1)^2} p_2^2 p_2',$$

et ainsi de suite. Si l'on transforme l'équation différentielle ci-dessus au moyen de la relation (2) on obtiendra la transformée

$$\frac{d^n v}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{2} m_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \ldots + n m_{n-1} \frac{dv}{dz} + m_n v = 0$$

et les coefficients $m_2, m_3, \ldots, m_n$ seront formés avec q_2 et ses dérivées par rapport à z, comme les $l_2, l_3, \ldots, l_n$ le sont avec p_2 et ses dérivées par rapport à x. Mais d'autre part les expressions:

$$m_2 z'^2, \; m_3 z'^3, \ldots, m_n z'^n$$

doivent se déduire des correspondantes pour $q_2 z'^2$, $q_3 z'^3$, ... en substituant $l_2, l_3, \ldots$ à $p_2, p_3, \ldots$; et réciproquement. En conséquence si l'on pose:

$$\mu_r = q_r - m_r, \qquad \lambda_r = p_r - l_r$$

on aura:

$$\mu_3 z'^3 = \lambda_3, \qquad \mu_4 z'^4 = \lambda_4 - 6\lambda_3 Z,$$

$$\mu_5 z'^5 = \lambda_5 - 10\lambda_4 Z + 30\lambda_3 Z^2 + \frac{5(n+7)}{3}\lambda_3 P_2,$$

$$\mu_6 z'^6 = \lambda_6 - 15\lambda_5 Z + 5\lambda_4\left[15Z^2 + \frac{n+9}{2}P_2\right]$$

$$- 5\lambda_3[30Z^3 - (n+4)P_3 + 3(n+9)ZP_2],$$

et ainsi de suite.

Les invariants $a_3, a_4, \ldots$ peuvent en conséquence s'exprimer comme il suit:

$$a_3 = \lambda_3, \qquad a_4 = \lambda_4 - 2\lambda_3', \qquad a_5 = \lambda_5 - \frac{5}{2}\lambda_4' + \frac{15}{7}\lambda_3'' - \frac{10}{7}\frac{7n+13}{n+1}p_2\lambda_3$$

et analoguement pour $a_6, a_7, \ldots$.

De ces expressions on déduit que si $a_3, a_4, \ldots, a_n$ sont nuls, λ_3, $\lambda_4, \ldots, \lambda_n$, sont nuls aussi et l'équation (1) se réduit dans ce cas à (6). Donc: si les invariants $a_3, a_4, \ldots, a_n$ d'une équation différentielle linéaire de l'ordre n sont nuls, les intégrales de cette équation peuvent s'exprimer par des formes binaires à coefficients constants des deux arguments ξ_1, ξ_2, qui sont les intégrales d'une équation différentielle du second ordre.

Un second résultat peut s'obtenir en observant que si les invariants impairs $a_3, a_5, a_7, \ldots$ sont nuls, la partie linéaire de l'expression de chacun de ces invariants est égale à zéro. Au moyen de la formule (5) on démontre que dans ce cas l'équation *adjointe* de Lagrange se réduit à l'équation différentielle primitive, donc: une équation différentielle linéaire d'ordre n pour laquelle tous les invariants impairs $a_3, a_5, \ldots$ sont nuls est à elle-même sa propre adjointe.

3. Deux invariants fondamentaux:

$$\alpha_r z'^r = a_r, \qquad \alpha_s z'^s = a_s$$

conduisent à un troisième invariant de la forme suivante:

$$(7) \quad a_{r,s} = \frac{12rs}{n+1}p_2 a_r a_s + \frac{(2r+1)(2s+1)}{r+s+1}a_r' a_s' - \frac{r(2r+1)}{r+s+1}a_r a_s'' - \frac{s(2s+1)}{r+s+1}a_s a_r''$$

et en indiquant avec $\beta_{r,s}$ la même expression formée de q_2, α_r, α_s et les dérivées de α_r, α_s relativement à la variable z, on a:

$$\beta_{r,s} z'^{r+s+2} = b_{r,s}.$$

En second lieu, des invariants absolus:

$$\frac{\alpha_r^s}{\alpha_s^r} = \frac{a_r^s}{a_s^r}; \qquad \frac{\beta_{r,s}^m}{\alpha_m^{r+s+2}} = \frac{b_{r,s}^m}{a_m^{r+s+2}}, \quad \text{etc.},$$

on déduit les invariants:

$$(8) \qquad c_{r,s} = sa_s a'_r - ra_r a'_s; \qquad d_{r,s,m} = ma_m b'_{r,s} - (r+s+2) b_{r,s} a'_m$$

pour lesquels:

$$\gamma_{r,s} z'^{r+s+1} = c_{r,s}; \qquad \delta_{r,s,m} z'^{m+r+s+3} = d_{r,s,m}.$$

4. Les deux théorèmes que j'ai démontrés précédemment prouvent déjà le rôle important des invariants dans la théorie des équations différentielles linéaires. HALPHEN dans ses remarquables travaux sur cette théorie a donné d'autres preuves de grande valeur relativement aux équations différentielles du troisième et du quatrième ordre. Peut-être une préoccupation continue de rattacher ses nouvelles recherches aux résultats de sa Thèse *Sur les invariants différentiels* a eu pour effet de rendre un peu compliquée et pas toujours claire et complète la méthode qu'il a suivie. Cette petite remarque ne diminue en rien l'importance des résultats de HALPHEN, d'autant plus que d'ordinaire dans tous ses travaux, »avec le génie de l'invention, on remarque le don si précieux de la clarté, et une conscience scrupuleuse qui ne laisse jamais rien d'incomplet et d'inachevé dans les sujets qu'il traite.»[1]

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les intégrales de l'équation (1) et:

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varphi(x)$$

une forme de l'ordre m à coefficients constants. La fonction $\varphi(x)$, comme il est connu, doit satisfaire à une équation différentielle linéaire de l'ordre:

$$g = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots m}$$

---

[1] Allocution prononcée par M. HERMITE, Président de l'Académie des sciences, *Comptes rendus* du 30 décembre 1889.

dont les coefficients sont fonctions de $p_2, p_3, \dots$ et de leurs dérivées. J'ai donné il y a quelques années une formule générale pour le calcul de cette équation d'ordre g.[1] En considérant les g fonctions de x:

$$(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}), \qquad (r_1, r_2, \dots, r_{n-1} = 0, 1, 2, \dots, m)$$

pour lesquelles ont lieu les relations:

$$(0, 0, \dots, 0) = \varphi(x),$$
$$(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) = 0$$

pour

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} > m,$$

$$(9) \quad \frac{d(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})}{dx} = \sum_1^{n-2}{}_s r_s(r_1 \dots r_{s-1} - 1, r_{s+1} + 1 \dots r_{n-1})$$
$$+ (m - r)(r_1 + 1, r_2 \dots r_{n-1})$$
$$- r_{n-1} \sum_2^n{}_s \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{1 \cdot 2 \dots s} p_s(r_1, r_2, \dots, r_{n-s} + 1 \dots r_{n-1} - 1)$$

on arrive à l'équation cherchée par la dérivation successive et l'élimination. Si l'on suppose $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire que les intégrales de l'équation (1) vérifient une relation homogène de l'ordre m, les opérations indiquées conduisent à deux résultats remarquables; 1° aux relations qui doivent subsister entre les coefficients de l'équation (1); 2° à la recherche d'une transformée (2) laquelle satisfait à ces relations.

Ces relations, comme HALPHEN l'a démontré pour $n = 3, m = 3$; $n = 4, m = 2$, sont formées avec les invariants des équations différentielles des ordres 3, 4.

Dans l'un et l'autre de ces cas $g = 10$; comme en général g conserve la même valeur si $n = i, m = j$; ou $n = j + 1, m = i - 1$. Les relations entre les invariants conservent alors la même forme.

5. Je suppose dans les paragraphes suivants $\varphi(x) = 0$. Soit $n = 3$ et $h(y_1, y_2, y_3)$ le hessien de la forme $f(y_1, y_2, y_3)$. Si l'on pose:

$$\Delta = \sum(\pm\, y_1 y_2' y_3'')$$

[1] Annali di Matematica, Tome 13.

on a en général:

$$h.\Delta^2 = \begin{vmatrix} (0,0) & (1,0) & (0,1) \\ (1,0) & (2,0) & (1,1) \\ (0,1) & (1,1) & (0,2) \end{vmatrix},$$

mais si $(0, 0) = 0$ la formule (9) donne $(1, 0) = 0$ et:

$$(0, 1) + (m - 1)(2, 0) = 0.$$

En conséquence si l'on pose $(2, 0) = \lambda$ on a $(0, 1) = -(m-1)\lambda$ et:

$$h\Delta^2 = -(m-1)^2.\lambda^3. \tag{10}$$

Soit $m = 3$, on a encore à considérer les six expressions (r_1, r_2):

$$(1, 1), (1, 2), (3, 0),$$
$$(0, 2), (2, 1), (0, 3),$$

pour lesquelles on obtient à l'aide de la formule (9):

$$(1, 1) = -\lambda', \qquad (3, 0) = 3\lambda',$$
$$(2, 1) = \lambda'', \qquad (0, 2) = -2\lambda'' + 3p_2\lambda,$$

et pour $(1, 2)$ les deux valeurs:

$$\frac{1}{2}[\lambda''' + 9p_2\lambda' + p_3\lambda]\ ;\ -2\lambda''' - 3p_2\lambda' + 3p_2'\lambda - 4p_3\lambda$$

et en conséquence:

$$\lambda''' + 3p_2\lambda' + \frac{3}{5}(3p_3 - 2p_2')\lambda = 0, \tag{11}$$

$$(1, 2) = 3p_2\lambda' - \frac{2}{5}a\lambda,$$

étant:

$$a = p_3 - \frac{3}{2}p_2'$$

le seul invariant fondamental dans ce cas. La formule (9) donne encore:

$$(0\,,\,3) = 9p_2\lambda'' - \frac{12}{5}a\lambda' - \frac{2}{5}a'\lambda,$$

$$\frac{d(0\,,\,3)}{dx} + 3[3p_2(1\,,\,2) + p_3(0\,,\,2)] = 0$$

ou, à cause de (11):

$$21a\lambda'' + 7a'\lambda' + (a'' + 27p_2a)\lambda = 0.$$

En éliminant λ'' et λ''' entre cette équation, celle qui en découle par différentiation et l'équation (11), on obtient:

$$(12) \qquad 8b\lambda' + \left(b' + \frac{2\,.\,7\,.\,3^4}{5}a^3\right)\lambda = 0,$$

où

$$b = 27p_2a_3^2 + 7a_3'^2 - 6a_3a_3''$$

est un second invariant de l'équation différentielle du 3me ordre (voir formule (7)). Enfin si l'on pose:

$$c = 8ba' - 3ab', \qquad p = 72p_2ab + \frac{7\,.\,17}{12}a'b' - \frac{7}{4}ab'' - \frac{2\,.\,17}{3}ba'',$$

$$q = 192p_2b^2 + 17b'^2 - 16bb'',$$

invariants des ordres 12, 13, 18, on trouve pour l'équation de condition la suivante:

$$\frac{1}{17}(32bp - 63aq) + 4\,.\,7^2\,.\,3^3a^3c - \frac{4\,.\,7^2\,.\,3^8}{5^2}a^7 = 0,$$

expression invariantive de l'ordre 21.

En supposant cette équation de condition satisfaite, on peut transformer l'équation différentielle:

$$y''' + 3p_2y' + p_3y = 0$$

de la manière suivante. Je pose:

$$Z = -\frac{\lambda'}{\lambda}$$

(paragraphe 1[r]); l'équation (11) devient:

$$P_3 - 3p_2 Z + \frac{3}{5}(3p_3 - 2p_2') = 0;$$

mais pour la transformée:

$$\frac{d^3 v}{dz^3} + 3q_2 \frac{dv}{dz} + q_3 v = 0$$

on a:

$$q_3 z'^3 = p_3 - 3p_2 Z + P_3;$$

on aura donc:

$$q_3 z'^3 + \frac{4}{5}a = 0 \quad \text{ou} \quad q_3 + \frac{4}{5}\alpha = 0$$

ou enfin:

$$q_3 = \frac{2}{3}\frac{dq_2}{dz},$$

qui complète la recherche relativement à la transformée.

On peut encore observer que l'équation (12) donne:

$$\lambda = \frac{c}{b^8} e^{-\frac{7.3^4}{4.5}\int \frac{a^3}{b} dx}$$

et vu que Δ dans l'équation (10) est une constante, on en déduira la valeur du hessien $h(y_1, y_2, y_3)$.

6. Je passe à l'autre cas pour lequel $g = 10$, ou $n = 4, m = 2$. Ce cas forme l'objet principal du mémoire de Halphen *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* publié dans ce journal (tome 3).

Etant $(0, 0, 0) = 0$, on aura $(1, 0, 0) = 0$; et en posant:

$$(2, 0, 0) = \lambda, \quad \text{on a} \quad (0, 1, 0) = -\lambda.$$

Les six autres fonctions sont:

$$(0, 2, 0) = \mu, \qquad (0, 0, 2) = \nu,$$

$$(1, 1, 0) = l, \qquad (1, 0, 1) = m, \qquad (0, 1, 1) = n$$

et:

$$(0, 0, 1) = -(\lambda' + l).$$

On a ainsi:

(13) $$h\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda & \lambda' + l \\ 0 & \lambda & l & m \\ \lambda & l & \mu & n \\ \lambda' + l & m & n & \nu \end{vmatrix};$$

mais dans ce cas h est constant, la valeur du déterminant sera donc une constante.

La formule (9) donne:

$$l = \frac{1}{2}\lambda', \qquad m = -\frac{3}{2}(\lambda'' + 4p_2\lambda), \qquad \mu = 2\lambda'' + 6p_2\lambda$$

et pour n les deux valeurs:

$$\lambda''' + 3p_2\lambda' + 3p_2'\lambda\,; \; -\frac{3}{2}\lambda''' - 3p_2\lambda' + (4p_3 - 6p_2')\lambda$$

et en conséquence:

(14) $$\lambda''' + \frac{12}{5}p_2\lambda' - \frac{2}{5}(4p_3 - 9p_2')\lambda = 0,$$

$$n = \frac{3}{5}p_2\lambda' + \frac{1}{5}(8p_3 - 3p_2')\lambda$$

et:

$$\nu = \frac{63}{5}p_2\lambda'' + \frac{18}{5}p_3\lambda' + \left(\frac{8}{5}p_3' - \frac{3}{5}p_2'' + 36p_2^2 - p_4\right)\lambda.$$

Enfin la même formule (9) donne:

$$\frac{d\nu}{dx} + 12p_2 n + 8p_3 m - 2p_4(\lambda' + l) = 0,$$

et suivant le même procédé que pour le cas précédent, on arrive à l'équation:

(15) $$8t\lambda' + (t' + k)\lambda = 0,$$

où nous avons posé:

$$t = 25a_2^2 + 7b_{3,3} + \frac{7 \cdot 5^2}{8} c_{3,4}, \tag{16}$$

$$k = 15b_{3,4} - \frac{3^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2}{5} a_2^3,$$

$b_{3,3}$, $b_{3,4}$, $c_{3,4}$ étant les invariants qui se déduisent des expressions (7), (8).

L'analogie entre les formules (12) et (15) est évidente; l'équation de condition sera en conséquence aussi dans ce cas une relation invariantive de l'ordre 21 et de la même forme que la supérieure.

Pour la transformée, posant encore $Z = -\frac{\lambda'}{\lambda}$, l'équation (14) donne en premier lieu:

$$\frac{5}{4}P_3 - 3p_2 Z - 2p_3 + \frac{9}{2}p_2' = 0$$

ou:

$$q_3 - 3\alpha_3 = 0 \quad \text{et en conséquence} \quad q_3 = \frac{9}{4}\frac{dq_2}{dz}.$$

La valeur de q_4 peut être déterminée par l'équation (13). On trouve en effet par la substitution de Z à $-\frac{\lambda'}{\lambda}$, que:

$$h\Delta^2 = \lambda^4 z'^4 \left[q_4 - \frac{8}{5}\frac{dq_3}{dz} + \frac{3}{5}\frac{d^2 q_2}{dz^2}\right];$$

mais $\lambda z' =$ const., en conséquence:

$$q_4 - \frac{8}{5}\frac{dq_3}{dz} + \frac{3}{5}\frac{d^2 q_2}{dz^2} = C,$$

C étant une constante; et enfin:

$$q_4 = 3\frac{d^2 q_2}{dz^2} + C.$$

On a ainsi démontré le théorème du à HALPHEN:[1] Toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est réductible par une substitution de la forme (2) au type:

---

[1] Acta mathematica, tome 3, pag. 349.

$$\frac{d^4v}{dz^4} + 6q_2\frac{d^2v}{dz^2} + 9\frac{dq_2}{dz}\frac{dv}{dz} + \left(3\frac{d^2q_2}{dz^2} + C\right)v = 0.$$

J'ajoute ici une observation qui regarde aussi le cas précédent. La quantité t (16) est un invariant du huitième ordre: on aura donc:

$$\tau z'^8 = t,$$

τ étant formé avec q_2, q_3, q_4 et leurs dérivées par rapport à z, comme t l'est avec p_2, p_3, p_4 et leurs dérivées par rapport à x. Cette dernière équation donne:

$$\frac{d\tau}{dz}z'^9 = t' - 8tZ.$$

Or si dans l'équation (15) on pose $\frac{\lambda'}{\lambda} = -Z$, on déduit:

$$\frac{d\tau}{dz} + \varkappa = 0,$$

étant $\varkappa z'^9 = k$.

Cette dernière équation est l'équation de condition pour la transformée, et l'on prouve facilement qu'elle est satisfaite par les valeurs supérieures de q_3, q_4.

7. Les cas qui suivent peuvent être traités avec la même méthode directe, et sauf des calcul plus longs ne présentent aucune difficulté. Par exemple, dans le cas de $n = 3$, $m = 4$ et en conséquence $g = 15$, si l'on pose:

$$(1, 0) = \lambda, \qquad (2, 1) = \mu$$

les deux valeurs de $(1, 2)$ données par la formule (9) conduisent à une première relation:

$$\mu' = -\frac{1}{6}\lambda''' - 2p_2\lambda' - \frac{4}{15}(7p_3 - 3p_2')\lambda$$

et les deux valeurs de $(1, 3)$ à la suivante:

$$a\mu + \frac{1}{12}\lambda^{v} + \frac{5}{4}p_2\lambda''' + \frac{1}{12}(13p_3 + 3p_2')\lambda'' + \frac{1}{12}(11p_3' - 3p_2'' + 36p_2^2)\lambda'$$
$$+ \frac{1}{7}\left(\frac{11}{6}p_3'' - p_2''' + 25p_2p_3 - \frac{33}{2}p_2p_2'\right)\lambda = 0,$$

où $\alpha = p_3 - \frac{3}{2}p_2'$ est l'invariant du 3me ordre.

Enfin l'équation qu'on déduit de la formule (9):

$$\frac{d(0\,,4)}{dx} + 12p_2(1\,,3) + 4p_3(0\,,3) = 0$$

donne la troisième relation:

$$a\lambda^{\text{IV}} + \frac{2}{3}a'\lambda''' + \frac{1}{7}(2a'' + 75p_2 a)\lambda'' + \frac{1}{2.7}\left(a''' + 77a^2 + 55p_2 a' + \frac{3.5.19}{2}p_2' a\right)\lambda'$$

$$+ \frac{1}{2.7.9}\left(a^{\text{IV}} + 6.7.11.aa' + 75p_2 a'' + \frac{3.5.31}{2}p_2' a' + \frac{9.83}{2}p_2'' a + 4^2.3^4.p_2^2 a\right)\lambda = 0.$$

Pour la transformée, en posant $Z = -\frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}$, et:

$$\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{2}Z^2 - P_2 = s$$

les trois relations supérieures deviennent:

$$s' = 2sZ + \frac{4}{5}\left(\frac{dq_2}{dz} - \frac{7}{3}q_3\right)z'^3,$$

$$7as = \left[-\frac{11}{6}\frac{d^2q_3}{dz^2} + \frac{d^3q_2}{dz^3} - 25q_2q_3 + \frac{33}{2}q_2\frac{dq_2}{dz}\right]z'^5.$$

Si l'on pose:

$$\sigma z'^2 = s$$

la première se reduit à:

$$\frac{d\sigma}{dz} = -2\left(\frac{14}{15}\alpha + \frac{dq_2}{dz}\right)$$

et la seconde à:

$$7\alpha\sigma = -\left[\frac{11}{6}\frac{d^2\alpha}{dz^2} + 25q_2\alpha + \frac{7}{4}\frac{d^3q_2}{dz^3} + 21q_2\frac{dq_2}{dz}\right],$$

où l'on a substitué à q_3 sa valeur $\alpha + \frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz}$.

L'élimination de σ donne ainsi une première équation de condition entre α et q_2 et leurs dérivées.

La troisième conduit de même à une seconde équation de condition entre α et q_2; ou à la suivante:

$$\frac{d^4\alpha}{dz^4} + 6.7.11.\alpha\frac{d\alpha}{dz} + 75q_2\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{3.5.31}{2}\frac{dq_2}{dz}\frac{d\alpha}{dz} + \frac{9.83}{2}\alpha\frac{d^2q_2}{dz^2} + 4^2.3^4.q_2^2\alpha = 0.$$

Dans ce cas, comme on sait, sont comprises certaines équations différentielles hypergéométriques du 3me ordre liées aux équations modulaires Jacobiennes pour la transformation du septième ordre.[1]

Le cas de $n = 5$, $m = 2$, et en conséquence comme dans le cas précédent $g = 15$ conduit analoguement à deux équations de condition. En posant:

$$(2, 0, 0, 0) = \lambda, \qquad (0, 2, 0, 0) = \mu$$

et:

$$Z = -\frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}, \qquad \frac{\mu}{\lambda} - 3Z^2 + 4P_2 = s,$$

$$\sigma z'^2 = s,$$

on trouve:

$$q_3 = \frac{1}{4}\frac{d\sigma}{dz}$$

et:

$$20\alpha\sigma = 2q_5 - 15\frac{dq_4}{dz} + 20\frac{d^2q_3}{dz^2} + 80q_2q_3,$$

α étant l'invariant du 3me ordre. L'élimination de σ donne la première équation de condition. La seconde équation est la suivante:

$$\left[2q_5 - 5\frac{dq_4}{dz} + 5\frac{d^3q_2}{dz^3} + 300q_2\frac{dq_2}{dz} - 200q_2q_3\right]\sigma + 4\frac{d^4q_3}{dz^4} - \frac{5}{4}\frac{d^3q_4}{dz^3} - 100q_2\frac{dq_4}{dz}$$
$$+ 10q_4\left(2q_3 - 5\frac{dq_2}{dz}\right) + 180q_2\frac{d^2q_3}{dz^2} - 80q_3\frac{dq_3}{dz} + 140\frac{dq_2}{dz}\frac{dq_3}{dz} + 60q_3\frac{d^2q_2}{dz^2}$$
$$+ 800q_2^2q_3 = 0.$$

[1] Voir mes lettres à M. KLEIN *Sur quelques équations différentielles,* Mathematische Annalen, Bd. 26.

En substituant au lieu de q_3 sa valeur supérieure, et posant:

$$10q_2 = \sigma + k,$$

les deux équations se simplifient beaucoup et l'on a:

$$\frac{d^3\sigma}{dz^3} + \frac{1}{5}\left(2k\frac{d\sigma}{dz} + 3\sigma\frac{dk}{dz}\right) + \frac{2}{5}q_5 - 3\frac{dq_4}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^5\sigma}{dz^5} + \frac{1}{2}\left[9k\frac{d^3\sigma}{dz^3} + 7\frac{dk}{dz}\frac{d^2\sigma}{dz^2} + 3\frac{d^2k}{dz^2}\frac{d\sigma}{dz} + \frac{d^3k}{dz^3}\sigma\right]$$
$$+ k\left[2k\frac{d\sigma}{dz} + 3\sigma\frac{dk}{dz}\right] - 5\left[\frac{1}{4}\frac{d^3q_4}{dz^3} + 2k\frac{dq_4}{dz} + \frac{dk}{dz}q_4\right] = 0.$$

Ces équations sont satisfaites en supposant $k = 0$, et en conséquence:

$$q_3 = \frac{5}{2}\frac{dq_2}{dz}, \qquad \frac{d^3q_4}{dz_3} = 8\frac{d^5q_2}{dz^5}, \qquad q_5 = \frac{15}{2}\frac{dq_4}{dz} - 25\frac{d^3q_2}{dz^3} = 0.$$

On arrive ainsi au théorème: »L'équation du 5me ordre:

$$\frac{d^5v}{dz^5} + 10q_2\frac{d^3v}{dz^3} + 10q_3\frac{d^2v}{dz^2} + 5q_4\frac{dv}{dz} + q_5v = 0$$

dans laquelle:

$$q_3 = \frac{5}{2}\frac{dq_2}{dz}, \qquad q_4 = 8\frac{d^2q_2}{dz^2} + \varphi(z), \qquad q_5 = 5\left[7\frac{d^3q_2}{dz^3} + \frac{3}{2}\frac{d\varphi}{dz}\right]$$

et $\varphi(z) = Az^2 + Bz + C$; A, B, C constantes; a ses intégrales liées par une relation quadratique».

Février 1890.

RECHERCHES SUR LES NOMBRES ET LES FONCTIONS DE BERNOULLI

PAR

A. BERGER

À UPSALA.

I. *Théorie des nombres et des fonctions de Bernoulli.*

Comme introduction à la théorie des nombres et des fonctions de BERNOULLI nous nous proposons la solution du problème suivant.

Problème. Former un groupe infini de fonctions d'une variable z

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \ldots, \tag{1}$$

qui satisfont aux équations

$$\varphi''(z, m+1) = \varphi'(z, m), \tag{2}$$

$$\varphi(z, 0) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(0, m) = 0 \tag{4}$$

pour

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

et pour toutes les valeurs de la variable z.

Pour la solution de ce problème nous procédons de la manière suivante. En intégrant les deux membres de l'équation (2) nous en obtiendrons pour $m \geq 0$

$$\varphi'(z, m+1) = \varphi(z, m) + B(m), \tag{5}$$

où l'on désigne par $B(m)$ une quantité qui ne dépend pas de z. Faisons dans l'équation (5) $m = 0$, nous en obtiendrons d'après l'équation (3)

$$\varphi'(z, 1) = B(0), \tag{6}$$

et de cette formule on déduit par intégration et en ayant égard à l'équation (4) la formule

$$\varphi(z, 1) = B(0)z. \tag{7}$$

Substituons dans l'équation (5) $m = 1$, nous en obtiendrons au moyen de l'équation (7)

$$\varphi'(z, 2) = B(0)z + B(1) \tag{8}$$

et par conséquent, en intégrant les deux membres de cette équation et en y appliquant l'équation (4),

$$\varphi(z, 2) = \frac{B(0)z^2}{1.2} + \frac{B(1)z}{1}. \tag{9}$$

Pour $m = 2$ on déduit des équations (5) et (9)

$$\varphi'(z, 3) = \frac{B(0)z^2}{1.2} + \frac{B(1)z}{1} + B(2), \tag{10}$$

d'où l'on tire par intégration et en ayant égard à l'équation (4)

$$\varphi(z, 3) = \frac{B(0)z^3}{1.2.3} + \frac{B(1)z^2}{1.2} + \frac{B(2)z}{1}. \tag{11}$$

En opérant de cette manière nous trouverons que toutes les fonctions du groupe (1) sont données par les formules

$$\varphi(z, 0) = 0, \qquad \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)z^k}{1.2.3\ldots k} \quad \text{pour} \quad m \geqq 1, \tag{12}$$

où l'on désigne par $B(0), B(1), B(2), \ldots$ une suite infinie de constantes arbitraires; et inversement on peut s'assurer sans difficulté, que les fonctions (12) satisfont aux équations (2), (3), (4), quelles que soient ces constantes. Pour la détermination de ces constantes nous fixerons les valeurs des fonctions $\varphi(z, m)$ pour $z = 1$ de sorte que l'on ait

$$\varphi(1, 1) = 1 \tag{13}$$

et

(14) $$\varphi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Pour que ces conditions soient remplies, il faut et il suffit d'après l'équation (12), que les nombres $B(m)$ satisfassent aux équations

(15) $$B(0) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Par ces équations les nombres

$$B(0), B(1), B(2), \ldots$$

sont complètement déterminés, et par suite on peut conclure des équations (12), que les fonctions

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \ldots$$

sont aussi complètement déterminées. Après cette introduction nous établissons les deux définitions suivantes.

Définition 1. Par les nombres Bernoulliens nous désignons le groupe infini de quantités

$$B(0), B(1), B(2), B(3), \ldots$$

qui satisfont aux équations

(16) $$B(0) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Définition 2. Par les fonctions Bernoulliennes nous désignons le groupe infini de fonctions

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \varphi(z, 3), \ldots$$

qui pour toutes les valeurs de la variable z satisfont aux équations

(17) $$\varphi''(z, m+1) = \varphi'(z, m) \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$

(18) $$\varphi(z, 0) = 0,$$

(19) $$\varphi(0, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$

(20) $$\varphi(1, 1) = 1,$$

(21) $$\varphi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Par ces deux définitions les nombres et les fonctions de Bernoulli sont parfaitement déterminés. En faiant dans la seconde des équations (16) m successivement égal à $2, 3, 4, 5, \ldots$ et en résolvant les équations ainsi obtenues, nous obtiendrons les valeurs des nombres Bernoulliens; les dix premiers sont

$$(22) \qquad B(0) = 1, \quad B(1) = -\frac{1}{2}, \quad B(2) = \frac{1}{12}, \quad B(3) = 0,$$

$$B(4) = -\frac{1}{720}, \quad B(5) = 0, \quad B(6) = \frac{1}{30240}, \quad B(7) = 0,$$

$$B(8) = -\frac{1}{1209600}, \quad B(9) = 0.$$

Des équations (16) on peut conclure, que les nombres Bernoulliens sont des quantités rationnelles. Au moyen de ces nombres on peut calculer les fonctions de Bernoulli en employant les équations (12); on trouvera

$$(23) \qquad \varphi(z, 0) = 0, \quad \varphi(z, 1) = z, \quad \varphi(z, 2) = \frac{z^2}{2} - \frac{z}{2},$$

$$\varphi(z, 3) = \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{12}, \quad \varphi(z, 4) = \frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{12} + \frac{z^2}{24},$$

$$\varphi(z, 5) = \frac{z^5}{120} - \frac{z^4}{48} + \frac{z^3}{72} - \frac{z}{720}, \quad \varphi(z, 6) = \frac{z^6}{720} - \frac{z^5}{240} + \frac{z^4}{288} - \frac{z^2}{1440}$$

et, en général, pour $m \geqq 1$

$$(24) \qquad \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k) z^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}.$$

Puisque les fonctions Bernoulliennes sont complètement déterminées par les équations (17), (18), (19), (20), (21), nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème I. Si un groupe infini de fonctions de la variable z

$$\chi(z, 0), \chi(z, 1), \chi(z, 2), \chi(z, 3), \ldots$$

pour toutes les valeurs de z satisfont aux équations

$$\chi''(z, m+1) = \chi'(z, m) \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$
$$\chi(z, 0) = 0,$$
$$\chi(0, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$
$$\chi(1, 1) = 1,$$
$$\chi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2,$$

on aura identiquement pour $m \geqq 0$

$$\chi(z, m) = \varphi(z, m).$$

Par l'équation (24) nous avons obtenu une expression générale des fonctions Bernoulliennes; dans ce qui suivra, nous déduirons des expressions des dérivées de ces fonctions. Désignons par r un nombre entier positif et différentions les deux membres de l'équation (17) $r-1$ fois par rapport à z, nous en obtiendrons pour $r \geqq 1$, $m \geqq 0$

$$\varphi^{(r+1)}(z, m+1) = \varphi^{r}(z, m). \tag{25}$$

En désignant par k un nombre entier qui satisfait à l'inégalité

$$k \leqq m,$$

on aura évidemment

$$m - k + r > 0,$$

et par conséquent on obtiendra de l'équation (25), en y remplaçant m par $m - k + r$,

$$\varphi^{(r+1)}(z, m-k+r+1) = \varphi^{r}(z, m-k+r), \tag{26}$$

formule qui subsiste pour $r \geqq 1$, $k \leqq m$. En introduisant dans l'équation (26)

$$r = 1, 2, 3, \ldots, k-1,$$

où $k \geqq 2$, et en ajoutant les égalités ainsi obtenues, on trouvera pour $2 \leqq k \leqq m$

$$\varphi^{k}(z, m) = \varphi'(z, m-k+1). \tag{27}$$

Mais cette formule est évidemment vraie aussi pour $k = 1$, et en y appliquant l'équation (5), nous en obtiendrons pour $1 \leqq k \leqq m$ la formule

$$\varphi^k(z, m) = \varphi(z, m-k) + B(m-k). \tag{28}$$

Des équations (24) et (28) résulte ce théorème:

Théorème II. Pour les fonctions Bernoulliennes et leurs dérivées on aura les formules

$$\varphi(z, 0) = 0, \qquad \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)z^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$$

pour $m \geqq 1$, et

$$\varphi^k(z, m) = \varphi(z, m-k) + B(m-k)$$

pour $1 \leqq k \leqq m$.

Soient maintenant x, y deux quantités quelconques et m un nombre entier positif, nous obtiendrons d'après la formule de Taylor, en remarquant que $\varphi(z, m)$ est une fonction entière du $m^{\text{ième}}$ degré,

$$\varphi(x+y, m) - \varphi(x, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi^k(x, m)y^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \tag{29}$$

et, par conséquent, d'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} \varphi(x+y, m) - \varphi(x, m) &= \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k) + B(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} y^k \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)y^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \end{aligned} \tag{30}$$

ou, d'après le même théorème,

$$\varphi(x+y, m) - \varphi(x, m) - \varphi(y, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}. \tag{31}$$

Le premier membre de cette équation étant une fonction symétrique des variables x et y, ce membre restera invariable en permutant x et y, et par suite nous aurons la formule

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(y, m-k)x^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}. \tag{32}$$

Par là le théorème suivant est démontré:

Théorème III. Si l'on désigne par m un nombre entier positif et par x et y deux quantités quelconques, on aura

$$\varphi(x+y\,,\,m)-\varphi(x\,,\,m)-\varphi(y\,,\,m)=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{\varphi(x\,,\,m-k)y^k}{1.2.3\ldots k}$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=m}\frac{\varphi(x\,,\,m-k)y^k}{1.2.3\ldots k}=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{\varphi(y\,,\,m-k)x^k}{1.2.3\ldots k}.$$

Substituons dans la seconde de ces formules

(33) $$x=z,\qquad y=1,$$

nous en tirerons

(34) $$\sum_{k=1}^{k=m}\frac{\varphi(z\,,\,m-k)}{1.2.3\ldots k}=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{\varphi(1\,,\,m-k)z^k}{1.2.3\ldots k},$$

et pour $m \geqq 2$ nous obtiendrons de cette équation, en y appliquant les formules (20) et (21),

(35) $$\sum_{k=1}^{k=m}\frac{\varphi(z\,,\,m-k)}{1.2.3\ldots k}=\frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Au moyen de cette équation et la formule (18) on peut calculer les fonctions Bernoulliennes sans recourir aux nombres Bernoulliens; en effet, pour $m = 2, 3, 4, \ldots$ on tire de l'équation (35)

$$\varphi(z\,,\,1)=\frac{z}{1},$$

$$\frac{\varphi(z\,,\,2)}{1}+\frac{\varphi(z\,,\,1)}{1.2}=\frac{z^2}{1.2},$$

$$\frac{\varphi(z\,,\,3)}{1}+\frac{\varphi(z\,,\,2)}{1.2}+\frac{\varphi(z\,,\,1)}{1.2.3}=\frac{z^3}{1.2.3},$$

. . . .

et ces formules donnent évidemment les valeurs des fonctions Bernoulliennes. D'après cela nous pouvons énoncer ce théorème:

Théorème IV. Si l'on désigne par m un nombre entier qui satisfait à l'inégalité

$$m > 2,$$

on aura

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(z, m-k)}{1.2.3\ldots k} = \frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

En supposant que

$$m \geqq 2,$$

et en faisant dans la première formule du théorème III

$$x = z, \qquad y = 1,$$

nous en obtiendrons selon l'équation (21)

$$(36) \qquad \varphi(z+1, m) - \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(z, m-k)}{1.2.3\ldots k}$$

et par suite, en y appliquant le théorème IV,

$$(37) \qquad \varphi(z+1, m) - \varphi(z, m) = \frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Maintenant nous ferons une application du théorème I; définissons, à cet effet, un groupe de fonctions

$$\chi(z, 0), \chi(z, 1), \chi(z, 2), \ldots$$

par les égalités

$$(38) \qquad \chi(z, 0) = 0, \qquad \chi(z, 1) = z, \qquad \chi(z, m) = (-1)^m \varphi(1-z, m)$$

pour $m \geqq 2$, nous en obtiendrons, en différentiant par rapport à z, les formules

$$(39) \qquad \chi'(z, 0) = 0, \qquad \chi'(z, 1) = 1, \qquad \chi'(z, m) = (-1)^{m-1} \varphi'(1-z, m)$$

pour $m \geqq 2$, lesquelles peuvent être réunies dans la seule formule

$$(40) \qquad \chi'(z, m) = (-1)^{m-1} \varphi'(1-z, m),$$

qui subsiste pour $m \geqq 0$. En différentiant de nouveau, nous obtiendrons de l'équation (40) pour $m \geqq 0$

$$(41) \qquad \chi''(z, m) = (-1)^m \varphi''(1-z, m),$$

et par suite, en y remplaçant m par $m + 1$,

(42) $$\chi''(z, m + 1) = (-1)^{m-1}\varphi''(1 - z, m + 1),$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 0$. Des équations (40), (42), (17) on déduit pour $m \geqq 0$

(43) $$\chi''(z, m + 1) = \chi'(z, m).$$

Des équations (38) on tire aussi, en employant les équations (21) et (19),

(44) $$\chi(z, 0) = 0,$$

(45) $$\chi(0, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$

(46) $$\chi(1, 1) = 1,$$

(47) $$\chi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Cela établi, appliquons le théorème I aux équations (43), (44), (45), (46), (47), nous en obtiendrons pour $m \geqq 0$

(48) $$\chi(z, m) = \varphi(z, m),$$

et par suite on aura d'après les équations (38) et (48) pour $m \geqq 2$

(49) $$\varphi(1 - z, m) = (-1)^m\varphi(z, m).$$

Nous résumons les formules (37) et (49) dans le théorème suivant:

Théorème V. Si l'on désigne par m un nombre entier supérieur ou égal à 2, on aura

$$\varphi(z + 1, m) - \varphi(z, m) = \frac{z^{m-1}}{1 . 2 . 3 \ldots (m - 1)}$$

et

$$\varphi(1 - z, m) = (-1)^m\varphi(z, m).$$

La première de ces formules, mise sous la forme

(50) $$z^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z + 1, m) - \varphi(z, m)\},$$

subsiste évidemment pour $m \geqq 1$, et en y remplaçant z par $z + h$, nous trouverons

(51) $$(z + h)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z + h + 1, m) - \varphi(z + h, m)\}.$$

Soit maintenant k un nombre entier positif, et faisons dans l'équation (51) h successivement égal à

$$0, 1, 2, \ldots, k-1,$$

et ajoutons les équations ainsi obtenues, nous obtiendrons

$$(52) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} (z+h)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z+k, m) - \varphi(z, m)\},$$

ce qui démontre ce théorème:

Théorème VI. Soient m et k deux nombres entiers positifs, on aura

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} (z+h)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z+k, m) - \varphi(z, m)\}.$$

Pour $z = 0$ on en déduit

$$(53) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} h^{m-1} = \Gamma(m)\varphi(k, m),$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$, $k \geqq 1$.

En combinant entre elles les deux formules du théorème V, après avoir remplacé z par $-z$ dans la seconde, nous en tirerons pour $m \geqq 2$

$$(54) \qquad \varphi(z, m) - (-1)^m \varphi(-z, m) = -\frac{z^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}.$$

Ecrivons cette équation sous la forme

$$(55) \qquad \varphi(z, m) + \frac{1}{2}\frac{z^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$$
$$= (-1)^m \left\{\varphi(-z, m) + \frac{1}{2}\frac{(-z)^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}\right\},$$

nous en obtiendrons le théorème suivant:

Théorème VII. Si l'on désigne par m un nombre entier supérieur ou égal à 2, l'expression

$$\varphi(z, m) + \frac{1}{2}\frac{z^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$$

est une fonction paire ou impaire de la variable z, suivant que m est un nombre pair ou impair.

Pour $m \geqq 3$ on tire des équations (24) et (22)

$$(56)\qquad \varphi(z, m) + \frac{1}{2}\frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{z^m}{1.2.3\ldots m} + \sum_{k=1}^{k=m-2} \frac{B(m-k)z^k}{1.2.3\ldots k},$$

et du théorème précédent provient ce corollaire:

Corollaire. Pour tout nombre entier positif n on a

$$(57)\qquad B(2n+1) = 0.$$

On peut aussi déduire cette formule des équations (49) et (5). Effectivement, si l'on remplace m par $m+1$ dans l'équation (49), on aura pour $m \geqq 1$

$$(58)\qquad \varphi(1-z, m+1) = (-1)^{m+1}\varphi(z, m+1)$$

et par conséquent, en différentiant,

$$(59)\qquad \varphi'(1-z, m+1) = (-1)^m\varphi'(z, m+1)$$

ou, d'après l'équation (5),

$$(60)\qquad \varphi(1-z, m) + B(m) = (-1)^m\varphi(z, m) + (-1)^m B(m),$$

d'où l'on tire pour $m \geqq 2$, en ayant égard à l'équation (49),

$$(61)\qquad B(m)\{1-(-1)^m\} = 0.$$

En faisant dans cette égalité

$$m = 2n+1,$$

nous retrouvons la formule (57).

Soit maintenant a un nombre entier positif, et définissons un groupe de fonctions

$$\chi(z, 0), \chi(z, 1), \chi(z, 2), \ldots$$

au moyen de l'égalité

$$(62)\qquad \chi(z, m) = a^{m-1}\sum_{r=0}^{r=a-1}\varphi\left(\frac{z+r}{a}, m\right) - a^{m-1}\sum_{r=0}^{r=a-1}\varphi\left(\frac{r}{a}, m\right),$$

où $m \geqq 0$. En différentiant cette égalité, on a

$$(63)\qquad \chi'(z, m) = a^{m-2}\sum_{r=0}^{r=a-1}\varphi'\left(\frac{z+r}{a}, m\right).$$

Remplaçant m par $m + 1$ et différentiant de nouveau, nous aurons, pour $m \geqq 0$,

$$(64) \qquad \chi''(z, m+1) = a^{m-2} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi''\left(\frac{z+r}{a}, m+1\right)$$

ou, d'après l'équation (17),

$$(65) \qquad \chi''(z, m+1) = a^{m-2} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi'\left(\frac{z+r}{a}, m\right).$$

Des équations (63) et (65) on tire pour $m \geqq 0$

$$(66) \qquad \chi''(z, m+1) = \chi'(z, m).$$

D'après les équations (62) et (18) on a

$$(67) \qquad \chi(z, 0) = 0$$

et

$$(68) \qquad \chi(0, m) = 0$$

pour $m \geqq 0$, et de l'équation (62) on tire pour $m \geqq 0$

$$(69) \qquad \chi(1, m) = a^{m-1} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r+1}{a}, m\right) - a^{m-1} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right)$$

et par suite, en introduisant $r - 1$ au lieu de r dans la première somme du second membre,

$$(70) \quad \chi(1, m) = a^{m-1} \sum_{r=1}^{r=a} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right) - a^{m-1} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right) = a^{m-1}\varphi(1, m),$$

d'où l'on tire d'après les formules (20) et (21)

$$(71) \qquad \chi(1, 1) = 1$$

et

$$(72) \qquad \chi(1, m) = 0$$

pour $m \geqq 2$. En appliquant le théorème I aux équations (66), (67), (68), (71), (72), on a, pour $m \geqq 0$,

$$(73) \qquad \chi(z, m) = \varphi(z, m),$$

et par suite l'équation (62) nous donne, pour $m \geqq 0$,

$$(74) \qquad \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{z+r}{a}, m\right) = \frac{\varphi(z, m)}{a^{m-1}} + \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right).$$

En différentiant par rapport à z les deux membres de cette équation et en remplaçant m par $m+1$, nous aurons, pour $m \geqq 0$,

$$(75) \qquad \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi'\left(\frac{z+r}{a}, m+1\right) = \frac{\varphi'(z, m+1)}{a^{m-1}},$$

d'où l'on tire, à l'aide de la formule (5),

$$(76) \qquad \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{z+r}{a}, m\right) = \frac{\varphi(z, m) - (a^m - 1)B(m)}{a^{m-1}}.$$

Introduisant dans l'équation (76) az au lieu de z, on aura ce théorème:

Théorème VIII. Si l'on désigne par a un nombre entier positif, on a pour $m \geqq 0$

$$\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(z + \frac{r}{a}, m\right) = \frac{\varphi(az, m) - (a^m - 1)B(m)}{a^{m-1}}.$$

Au moyen de ce théorème nous pouvons calculer la valeur de la fonction $\varphi(z, m)$ pour $z = \frac{1}{2}$; en effet, substituons

$$z = 0, \qquad a = 2$$

dans la formule démontrée, nous en tirerons

$$(77) \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}, m\right) = -\frac{(2^m - 1)B(m)}{2^{m-1}}$$

pour $m \geqq 0$. Désignons par n un nombre entier positif quelconque, on obtiendra des équations (77) et (57)

$$(78) \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}, 2n+1\right) = 0.$$

Si l'on désigne par z une quantité quelconque et par v une quantité qui remplit la condition

$$|v| < 2\pi,$$

l'expression

$$v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}$$

peut être développée en série convergente ordonnée suivant les puissances de v, et par suite nous aurons pour ces valeurs de v une égalité de la forme

$$(79)\qquad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}=\chi(z\,,0)+\chi(z\,,1)v+\chi(z\,,2)v^2+\ldots,$$

où $\chi(z\,,0)\,,\chi(z\,,1)\,,\chi(z\,,2)\,,\ldots$ sont des fonctions de z. Pour $v=0$ on en tire

$$(80)\qquad \chi(z\,,0)=0,$$

et par suite on aura

$$(81)\qquad \chi'(z\,,0)=0.$$

Différentiant les deux membres de l'équation (79) par rapport à z, nous aurons, en divisant les deux membres par v,

$$(82)\qquad \frac{ve^{zv}}{e^v-1}=\chi'(z\,,1)+\chi'(z\,,2)v+\chi'(z\,,3)v^2+\ldots.$$

Faisant $v=0$, on en tire

$$(83)\qquad \chi'(z\,,1)=1$$

et, par conséquent,

$$(84)\qquad \chi''(z\,,1)=0.$$

Différentiant les deux membres de l'équation (82) par rapport à z, et divisant les deux membres par v, on a donc

$$(85)\qquad \frac{ve^{zv}}{e^v-1}=\chi''(z\,,2)+\chi''(z\,,3)v+\chi''(z\,,4)v^2+\ldots.$$

Des équations (81), (82), (84), (85) on obtient pour $m\geqq 0$ la formule

$$(86)\qquad \chi''(z\,,m+1)=\chi'(z\,,m).$$

Pour $z = 0$ on déduit de l'équation (79)

$$(87) \qquad 0 = \chi(0, 0) + \chi(0, 1)v + \chi(0, 2)v^2 + \ldots,$$

et par suite on aura pour $m \geqq 0$

$$(88) \qquad \chi(0, m) = 0.$$

En faisant $z = 1$ dans l'équation (79), nous en tirerons

$$(89) \qquad v = \chi(1, 0) + \chi(1, 1)v + \chi(1, 2)v^2 + \ldots,$$

et par conséquent on obtiendra, en égalant les uns aux autres les coefficients des puissances de v dans les deux membres,

$$(90) \qquad \chi(1, 1) = 1$$

et

$$(91) \qquad \chi(1, m) = 0$$

pour $m \geqq 2$. Appliquons maintenant le théorème I aux équations (86), (80), (88), (90), (91), nous en déduirons pour $m \geqq 0$

$$(92) \qquad \chi(z, m) = \varphi(z, m),$$

et par suite nous obtiendrons de l'équation (79) la formule

$$(93) \qquad v\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} = \varphi(z, 0) + \varphi(z, 1)v + \varphi(z, 2)v^2 + \ldots,$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de z et pour $|v| < 2\pi$.

En divisant les deux membres de cette équation par v, on aura

$$(94) \qquad \frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi(z, k)v^{k-1}$$

et par suite, en différentiant par rapport à z,

$$(95) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi'(z, k)v^{k-1}.$$

Remplaçons k par $k + 1$ dans le second membre de cette équation, nous aurons

(96) $$\frac{ve^{zv}}{e^v - 1} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \varphi'(z, k + 1)v^k$$

ou, d'après l'équation (5),

(97) $$\frac{ve^{zv}}{e^v - 1} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \{\varphi(z, k) + B(k)\}v^k.$$

Pour $z = 0$ on en tire

(98) $$\frac{v}{e^v - 1} = B(0) + B(1)v + B(2)v^2 + \ldots.$$

Par là le théorème suivant est démontré:

Théorème IX. Si l'on désigne par z une quantité quelconque et par v une quantité qui satisfait à l'inégalité

$$|v| < 2\pi,$$

on aura

$$v\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} = \varphi(z, 0) + \varphi(z, 1)v + \varphi(z, 2)v^2 + \ldots$$

et

$$\frac{v}{e^v - 1} = B(0) + B(1)v + B(2)v^2 + \ldots.$$

En faisant dans les formules ainsi démontrées

$$v = 1,$$

nous trouverons que pour une valeur quelconque de la variable z la somme de toutes les fonctions Bernoulliennes

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \ldots$$

est égale à

$$\frac{e^z - 1}{e - 1},$$

et que la somme de tous les nombres Bernoulliens

$$B(0), B(1), B(2), \ldots.$$

est égale à

$$\frac{1}{e-1}.$$

Maintenant nous développerons les fonctions Bernoulliennes en des séries trigonométriques, et pour ce but nous ferons usage des formules connues

(99) $$\frac{e^{a\pi(2z-1)}+e^{-a\pi(2z-1)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi z}{a^2+k^2},$$

qui est vraie pour $0 \leqq z \leqq 1$, et

(100) $$\frac{e^{a\pi(2z-1)}-e^{-a\pi(2z-1)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\sin 2k\pi z}{a^2+k^2},$$

qui subsiste pour $0<z<1$, a étant une quantité réelle quelconque. Nous introduisons aussi une fonction $\mu(z, m)$, définie pour toutes les valeurs réelles de z et pour tous les nombres entiers positifs m par les égalités

(101) $$\mu(z, m)=0$$

pour $m \geqq 2$, mais

(102) $$\mu(z, 1)=\frac{1}{2}.$$

si z est un nombre entier pair,

(103) $$\mu(z, 1)=0,$$

si z n'est pas un nombre entier, et

(104) $$\mu(z, 1)=-\frac{1}{2},$$

si z est un nombre entier impair.

Au moyen de la fonction $\mu(z, m)$ l'équation (100) peut se mettre sous la forme

(105) $$\frac{e^{a\pi(2z-1)}-e^{-a\pi(2z-1)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=-2\mu(z, 1)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\sin 2k\pi z}{a^2+k^2},$$

et cette équation subsiste évidemment pour $0 \leqq z \leqq 1$. En ajoutant les équations (99) et (105) et en y substituant

$$a = \frac{v}{2\pi},$$

nous en obtiendrons pour $0 \leqq z \leqq 1$ la formule

$$(106) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = - v\mu(z, 1) - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4k\pi v \sin 2k\pi z - 2v^2 \cos 2k\pi z}{4k^2\pi^2 + v^2},$$

d'où l'on tire après quelques réductions faciles

$$(107) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = - v\mu(z, 1) - \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{ve^{2k\pi zi}}{2k\pi i - v} - \frac{ve^{-2k\pi zi}}{2k\pi i + v} \right\}.$$

Si l'on impose à la quantité v la condition

$$|v| < 2\pi,$$

on aura

$$(108) \qquad \frac{ve^{2k\pi zi}}{2k\pi i - v} = e^{2k\pi zi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{v}{2k\pi i} \right)^n$$

et

$$(109) \qquad - \frac{ve^{-2k\pi zi}}{2k\pi i + v} = e^{-2k\pi zi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-v}{2k\pi i} \right)^n;$$

par conséquent, nous obtiendrons de l'équation (107)

$$(110) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = - v\mu(z, 1) - \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{v}{2k\pi i} \right)^n \{ e^{2k\pi zi} + (-1)^n e^{-2k\pi zi} \}$$

ou, d'après l'équation (101),

$$(111) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(z, n) v^n - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{v^n}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi zi} + (-1)^n e^{-2k\pi zi}}{k^n}.$$

Des équations (93) et (98) on déduit par addition

$$(112) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \{ \varphi(z, n) + B(n) \} v^n,$$

et en égalant les uns aux autres les coefficients de v^m dans les seconds membres des équations (111) et (112), on obtiendra pour $0 \leqq z \leqq 1$ et pour $m \geqq 1$ la formule

$$(113) \qquad \varphi(z, m) = -B(m) - \mu(z, m) - \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi z i} + (-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème X. Si l'on désigne par m un nombre entier positif quelconque et par z une quantité réelle, qui satisfait aux conditions

$$0 < z < 1,$$

on aura

$$\varphi(z, m) = -B(m) - \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi z i} + (-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m};$$

pour $m \geqq 2$ cette formule subsiste encore pour $z = 0$ et pour $z = 1$.

Si l'on désigne par n un nombre entier positif, nous obtiendrons de ce théorème pour

$$n = 1, \quad 0 < z < 1$$

et pour

$$n \geqq 2, \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

la formule

$$(114) \qquad \varphi(z, 2n-1) = -B(2n-1) + \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n-1}};$$

de même, pour

$$n \geqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq 1,$$

nous aurons

$$(115) \qquad \varphi(z, 2n) = -B(2n) - \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n}}.$$

Pour $z = 0$ on déduit du théorème X et de l'équation (19) le théorème suivant:

Théorème XI. Si l'on désigne par m un nombre entier supérieur ou égal à 2, on aura

$$B(m) = -\frac{1 + (-1)^m}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^m}.$$

Soit n un nombre entier positif, et faisons $m = 2n + 1$ dans cette formule, nous retrouverons l'équation (57); en y faisant $m = 2n$, nous aurons pour $n \geqq 1$

$$B(2n) = \frac{2(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2n}}, \tag{116}$$

d'où résulte ce corollaire:

Corollaire. Si l'on désigne par n un nombre entier positif quelconque, l'expression

$$\frac{1}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

est une quantité rationnelle.

De la formule (116) on peut aussi conclure que le nombre $B(2n)$ a le même signe que $(-1)^{n-1}$.

Maintenant nous évaluerons la somme de la série

$$\frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi x i} + (-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m},$$

où l'on désigne par x une quantité réelle quelconque et par m un nombre entier positif. A cet effet nous introduisons la fonction numérique

$$E(x),$$

que nous définissons de la manière suivante. Par $E(x)$ nous désignons le plus grand des nombres entiers qui ne surpassent pas la quantité réelle x, de sorte que l'on aura

$$0 \leqq x - E(x) < 1. \tag{117}$$

Cela posé, substituons dans la formule (113)

$$z = x - E(x),$$

nous en tirerons

$$\frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi x i} + (-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m} \tag{118}$$

$$= -B(m) - \mu\{x - E(x), m\} - \varphi\{x - E(x), m\},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XII. Si l'on désigne par x une quantité réelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, on aura

$$\frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2k\pi x i}+(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$
$$= -B(m)-\mu\{x-E(x)\,,\,m\}-\varphi\{x-E(x)\,,\,m\}.$$

Corollaire. Si l'on désigne par x une quantité réelle et rationnelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, l'expression

$$\frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2k\pi x i}+(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$

est une quantité réelle et rationnelle.

Dans ce qui suit nous appliquerons les formules précédentes à l'évaluation de quelques intégrales définies. En mettant l'équation (5) sous la forme

$$\varphi(z\,,\,m)=\varphi'(z\,,\,m+1)-B(m),$$

et en intégrant entre les limites $z=0$ et $z=c$, où l'on désigne par c une quantité finie quelconque, on aura pour $m\geqq 0$

$$(119)\qquad \int_0^c \varphi(z\,,\,m)dz=\varphi(c\,,\,m+1)-B(m)c.$$

Remplaçons c par $c+1$ dans cette équation et combinons entre elles les formules ainsi obtenues, nous trouverons

$$(120)\qquad \int_c^{c+1}\varphi(z\,,\,m)dz=\varphi(c+1\,,\,m+1)-\varphi(c\,,\,m+1)-B(m)$$

ou, d'après l'équation (50),

$$(121)\qquad \int_c^{c+1}\varphi(z\,,\,m)dz=\frac{c^m}{\Gamma(m+1)}-B(m),$$

formule qui subsiste pour $m\geqq 0$. Pour $c=0$ on en tire, en supposant que $m\geqq 1$,

$$(122)\qquad \int_0^1\varphi(z\,,\,m)dz=-B(m).$$

Cela établi, nous évaluerons l'intégrale

$$\int_0^c \varphi(z, m) e^{-az} dz,$$

où a et c sont des quantités finies quelconques, excepté que a ne soit pas nul. Posons, à cet effet, pour $m \geqq 0$

$$(123) \qquad f(m) = a^m \int_0^c \varphi(z, m) e^{-az} dz,$$

nous aurons

$$(124) \qquad f(0) = 0.$$

Intégrant par parties, nous tirons de l'équation (123)

$$(125) \qquad f(m) = -a^{m-1} \int_0^c \varphi(z, m) de^{-az}$$

$$= -a^{m-1} \Big|_0^c \varphi(z, m) e^{-az} + a^{m-1} \int_0^c \varphi'(z, m) e^{-az} dz$$

et, par suite, en supposant $m \geqq 1$ et en employant les équations (5) et (19),

$$(126) \quad f(m) = -a^{m-1} \varphi(c, m) e^{-ac} + a^{m-1} \int_0^c \{\varphi(z, m-1) + B(m-1)\} e^{-az} dz.$$

Des équations (126) et (123) on tire

$$(127) \quad f(m) - f(m-1) = -a^{m-1} \varphi(c, m) e^{-ac} + B(m-1) a^{m-2} (1 - e^{-ac});$$

en remplaçant dans cette équation m par

$$1, 2, 3, \ldots, m-1, m,$$

et en ajoutant les résultats ainsi obtenus, nous en obtiendrons pour $m \geqq 1$, en ayant égard à l'équation (124),

$$(128) \quad f(m) = - e^{-ac} \sum_{h=1}^{h=m} \varphi(c, h) a^{h-1} + (1 - e^{-ac}) \sum_{h=1}^{h=m} B(h-1) a^{h-2}$$

ou d'après l'équation (123), si on remplace dans la seconde somme h par $h + 1$,

(129) $$\int_0^c \varphi(z, m)e^{-az}dz = -\frac{e^{-ac}}{a^m}\sum_{h=1}^{h=m}\varphi(c, h)a^{h-1} + \frac{1-e^{-ac}}{a^{m+1}}\sum_{h=0}^{h=m-1}B(h)a^h,$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$ et pour toutes les valeurs finies de a et c, excepté pour $a = 0$. Nous ferons deux applications de cette formule.

1) Supposons que la partie réelle de la quantité a soit positive, nous obtiendrons de l'équation (129), en faisant croître c vers l'infini positif,

(130) $$\int_0^\infty \varphi(z, m)e^{-az}dz = \frac{1}{a^{m+1}}\sum_{h=0}^{h=m-1}B(h)a^h$$

pour $m \geqq 1$. Désignons par ψ une quantité réelle qui satisfait aux inégalités

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2},$$

et faisons dans l'équation (130)

$$a = \cos\psi + i\sin\psi,$$

nous en déduirons

(131) $$\int_0^\infty \varphi(z, m)e^{-z\cos\psi - iz\sin\psi}dz$$
$$= \sum_{h=0}^{h=m-1}B(h)\{\cos(m+1-h)\psi - i\sin(m+1-h)\psi\}.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires dans cette équation, nous en tirerons

(132) $$\int_0^\infty \varphi(z, m)e^{-z\cos\psi}\cos(z\sin\psi)dz = \sum_{h=0}^{h=m-1}B(h)\cos(m+1-h)\psi$$

et

(133) $$\int_0^\infty \varphi(z, m)e^{-z\cos\psi}\sin(z\sin\psi)dz = \sum_{h=0}^{h=m-1}B(h)\sin(m+1-h)\psi,$$

formules qui sont vraies pour

$$m \geqq 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (130) par a^{m+1}, et supposons que

$$|a| < 2\pi,$$

nous en obtiendrons pour $m = \infty$

$$(134) \qquad \lim_{m=\infty} a^{m+1} \int_0^\infty \varphi(z, m) e^{-az} dz = \sum_{h=0}^{h=\infty} B(h) a^h$$

ou, d'après l'équation (98),

$$(135) \qquad \lim_{m=\infty} a^{m+1} \int_0^\infty \varphi(z, m) e^{-az} dz = \frac{a}{e^a - 1},$$

formule qui subsiste si la partie réelle de la quantité a est positive, et que le module de a soit inférieur à 2π. Pour $a = 1$ on déduit des équations (130) et (135) la formule

$$(136) \qquad \int_0^\infty \varphi(z, m) e^{-z} dz = \sum_{h=0}^{h=m-1} B(h),$$

qui est vraie pour $m \geqq 1$, et

$$(137) \qquad \lim_{m=\infty} \int_0^\infty \varphi(z, m) e^{-z} dz = \frac{1}{e-1}.$$

2) En faisant dans l'équation (129) $c = 1$ et en y appliquant les formules (20) et (21), nous aurons pour $m \geqq 1$

$$(138) \qquad \int_0^1 \varphi(z, m) e^{-az} dz = -\frac{e^{-a}}{a^m} + \frac{1 - e^{-a}}{a^{m+1}} \sum_{h=0}^{h=m-1} B(h) a^h,$$

et en substituant dans cette équation

$$a = 2k\pi i,$$

où l'on désigne par k un nombre entier réel différent de 0, nous trouverons pour $m \geqq 1$

$$(139) \qquad \int_0^1 \varphi(z, m) e^{-2k\pi z i} dz = -\frac{1}{(2k\pi i)^m}.$$

Désignons par n un nombre entier positif quelconque, nous obtiendrons de l'équation (139) les formules suivantes

$$(140) \qquad \int_0^1 \varphi(z, 2n-1)\cos 2k\pi z dz = 0,$$

$$(141) \qquad \int_0^1 \varphi(z, 2n-1)\sin 2k\pi z dz = \frac{(-1)^n}{(2k\pi)^{2n-1}},$$

$$(142) \qquad \int_0^1 \varphi(z, 2n)\cos 2k\pi z dz = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}},$$

$$(143) \qquad \int_0^1 \varphi(z, 2n)\sin 2k\pi z dz = 0.$$

Faisons dans l'équation (119)

$$c = \frac{1}{2}.$$

nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(144) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, m) dz = \varphi\left(\frac{1}{2}, m+1\right) - \frac{B(m)}{2}$$

et, par suite, d'après l'équation (77),

$$(145) \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, m) dz = -\frac{B(m)}{2} - \left(2 - \frac{1}{2^m}\right) B(m+1).$$

Soit maintenant h une quantité réelle et désignons par $f(z)$ une fonction de la variable z telle que les fonctions

$$f(z), f'(z), f''(z), \ldots, f^{m+1}(z)$$

soient finies et continues entre les limites $z = h$ et $z = h + 1$. En appliquant la formule (5) à l'identité

$$(146) \qquad \frac{d}{dz}\{\varphi(z, r+1) f^{r+1}(h+z)\} = \varphi(z, r+1) f^{r+2}(h+z) + \varphi'(z, r+1) f^{r+1}(h+z),$$

où $r \geqq 0$, nous en tirerons

$$(147) \qquad \frac{d}{dz}\{\varphi(z, r+1)f^{r+1}(h+z)\}$$

$$= B(r)f^{r+1}(h+z) + \varphi(z, r+1)f^{r+2}(h+z) + \varphi(z, r)f^{r+1}(h+z).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $(-1)^r dx$, et intégrons entre les limites 0 et 1, nous aurons, en observant l'équation (19),

$$(148) \qquad (-1)^r\varphi(1, r+1)f^{r+1}(h+1) = (-1)^r B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$

$$-(-1)^{r+1}\int_0^1\varphi(z, r+1)f^{r+2}(h+z)dz + (-1)^r\int_0^1\varphi(z, r)f^{r+1}(h+z)dz,$$

formule qui subsiste évidemment pour $r \geqq 0$, en employant la notation

$$f^0(z) = f(z).$$

Soit maintenant m un nombre entier positif, et substituons dans l'équation (148)

$$r = 0, 1, 2, \ldots, m-1;$$

en ajoutant les égalités ainsi obtenues, nous aurons, d'après les formules (18), (20), (21),

$$(149) \qquad f'(h+1) = \sum_{r=0}^{r=m-1}(-1)^r B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$

$$-(-1)^m\int_0^1\varphi(z, m)f^{m+1}(h+z)dz$$

et, par conséquent,

$$(150) \qquad f'(h+1) = \sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$

$$-(-1)^m\int_0^1\{\varphi(z, m) + B(m)\}f^{m+1}(h+z)dz.$$

Puisque on a

$$(-1)^r B(r) = B(r)$$

pour $r = 0$ et pour $r \geqq 2$, mais

$$(-1)^r B(r) = B(r) + 1$$

pour $r \doteq 1$, nous obtiendrons de l'équation (150)

$$(151)\qquad f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$- (-1)^m \int_0^1 \{\varphi(z, m) + B(m)\} f^{m+1}(h+z)dz,$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$. Introduisons dans l'intégrale $z - h$ au lieu de z, nous en conclurons

$$(152)\qquad f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$- (-1)^m \int_h^{h+1} \{\varphi(z-h, m) + B(m)\} f^{m+1}(z)dz.$$

Or, h étant un nombre entier, on a d'après le théorème X pour $m \geqq 1$ et pour $h < z < h + 1$

$$(153)\qquad \varphi(z-h, m) + B(m) = -\frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m},$$

et, par suite, on obtiendra de l'équation (152)

$$(154)\qquad f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$+ \frac{(-1)^m}{(2\pi i)^m}\int_h^{h+1} f^{m+1}(z)\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m}dz.$$

Désignons maintenant par k un nombre entier positif et supposons que la fonction $f(z)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m + 1$ soient finies et continues entre les limites $z = 0$ et $z = k$; en faisant dans l'équation (154) h successivement égal à $0, 1, 2, \ldots, k-1$, et en ajoutant les égalités ainsi obtenues, nous obtiendrons

$$(155)\qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\}$$
$$+ \frac{(-1)^m}{(2\pi i)^m}\int_0^k f^{m+1}(z)\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m}dz,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XIII. Soit $f(z)$ une fonction de la variable réelle z, désignons par k et m deux nombres entiers positifs, et supposons que les fonctions

$$f(z)\,,\, f'(z)\,,\, f''(z)\,,\, \ldots\,,\, f^{m+1}(z)$$

soient finies et continues entre les limites $z = 0$ et $z = k$, nous aurons

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\}$$
$$+ \frac{(-1)^m}{(2\pi i)^m}\int_0^k f^{m+1}(z)\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m}\,dz.$$

La quantité

$$(-1)^m\frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{i^m}$$

étant comprise entre les limites 2 et -2, on aura pour $m \geqq 2$

(156) $$\frac{(-1)^m}{i^m}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m} = 2\theta_1\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^m},$$

où $-1 \leqq \theta_1 \leqq 1$, et par suite on obtiendra du théorème précédent

(157) $$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\} + \frac{2}{(2\pi)^m}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^m}\int_0^k \theta_1 f^{m+1}(z)\,dz.$$

En supposant que la dérivée $f^{m+1}(z)$ ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = k$, on a

(158) $$\int_0^k \theta_1 f^{m+1}(z)\,dz = \theta_2\int_0^k f^{m+1}(z)\,dz$$
$$= \theta_2\{f^m(k) - f^m(0)\},$$

où la quantité θ_2, qui est une valeur moyenne des quantités θ_1, satisfait aux inégalités

$$-1 < \theta_2 < 1,$$

et des équations (157) et (158) on tire

(159) $$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\} + \frac{2\theta_2}{(2\pi)^m}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^m}\{f^m(k) - f^m(0)\}.$$

Désignons par n un nombre entier positif quelconque et faisons dans l'équation (159)

$$m = 2n, \qquad \theta_2 = (-1)^n \theta,$$

nous en obtiendrons, en employant l'équation (116),

$$(160) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\} - \theta B(2n)\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\},$$

où $-1 < \theta < 1$, et où l'on suppose que $f^{2n+1}(z)$ ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = k$.

Supposons en outre que les dérivées $f^{2n+2}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ soient finies et continues, et que $f^{2n+3}(z)$ ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = k$, nous trouverons, en remplaçant n par $n + 1$ dans l'équation (160),

$$(161) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n+2} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\}$$
$$- \theta_1 B(2n+2)\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\},$$

où $-1 < \theta_1 < 1$, et par conséquent

$$(162) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\}$$
$$+ (1 - \theta_1) B(2n+2)\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\},$$

et des équations (160) et (162) on conclura

$$(163) \qquad - \theta B(2n)\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\}$$
$$= (1 - \theta_1) B(2n+2)\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\}.$$

Puisque, d'après l'équation (116), les nombres $B(2n)$ et $B(2n+2)$ sont de signes contraires, nous obtiendrons de l'équation (163)

$$(164) \qquad \theta\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\} = P\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\},$$

en désignant par P une quantité positive. Maintenant nous distinguerons les deux cas suivants:

1) Si les dérivées $f^{2n+1}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ ont le même signe entre $z = 0$

et $z = k$, les fonctions $f^{2n}(z)$ et $f^{2n+2}(z)$ seront simultanément croissantes ou décroissantes entre $z = 0$ et $z = k$; par suite les différences

$$f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\,,\; f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)$$

auront le même signe, et de l'équation (164) on peut conclure que

(165) $$\theta > 0;$$

or, θ étant compris entre -1 et 1, on en déduit

(166) $$0 < \theta < 1.$$

2) Si les dérivées $f^{2n+1}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ sont de signes contraires entre $z = 0$ et $z = k$, l'une des deux fonctions $f^{2n}(z)$ et $f^{2n+2}(z)$ croîtra, pendant que l'autre décroîtra entre $z = 0$ et $z = k$, et par suite les différences

$$f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\,,\; f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)$$

seront de signes contraires, et de l'équation (164) on obtiendra

(167) $$\theta < 0,$$

et par suite, θ étant compris entre -1 et 1,

(168) $$-1 < \theta < 0.$$

Par là le théorème suivant est démontré:

Théorème XIV. Soit $f(z)$ une fonction de la variable réelle z, et désignons par k et n deux nombres entiers positifs; supposons que les fonctions

$$f(z)\,,\, f'(z)\,,\, f''(z)\,, \ldots,\, f^{2n+1}(z)$$

soient finies et continues entre les limites $z = 0$ et $z = k$, et que $f^{2n+1}(z)$ ne change pas de signe dans cet intervalle, on aura

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\} - \theta B(2n)\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\},$$

où $-1 < \theta < 1$. Si, en outre, les dérivées $f^{2n+2}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ sont finies et continues entre $z = 0$ et $z = k$, et que $f^{2n+3}(z)$ ne change pas de signe dans cet intervalle, on aura

$$0 < \theta < 1,$$

si les dérivées $f^{2n+1}(z)$ et $f^{2n+2}(z)$ ont le même signe, mais

$$-1 < \theta < 0,$$

si ces dérivées sont de signes contraires dans le sus-dit intervalle.

II. *Généralisation des nombres et des fonctions de Bernoulli.*

Dans ses leçons sur l'arithmétique supérieure M. Kronecker a introduit la notion de discriminant fondamental, et il a donné ce nom à tout nombre entier Δ, qui n'est pas un nombre carré positif et qui est de l'une des trois formes suivantes:

1) $\Delta = P$, où $P \equiv 1$, mod 4,

2) $\Delta = 4P$, où $P \equiv -1$, mod 4,

3) $\Delta = 8P$, où $P \equiv 1$, mod 2,

pourvu que P désigne dans tous ces cas un nombre entier, qui n'est divisible par aucun nombre carré plus grand que l'unité. En désignant par

$$\left(\frac{\Delta}{r}\right)$$

le symbole de Legendre, généralisé par M. Kronecker, et par ε le signe du nombre Δ, en sorte que

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon\Delta > 0, \tag{169}$$

on a les formules suivantes:

$$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) = 0, \tag{170}$$

$$\left(\frac{\Delta}{r + h\varepsilon\Delta}\right) = \left(\frac{\Delta}{r}\right) \quad \text{pour} \quad r > 0\,, h > 0, \tag{171}$$

$$\left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta - r}\right) = \varepsilon\left(\frac{\Delta}{r}\right) \quad \text{pour} \quad 0 < r < \varepsilon\Delta, \tag{172}$$

$$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{2k\pi ri}{\varepsilon\Delta}} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta}) \quad \text{pour} \quad k > 0, \tag{173}$$

où la valeur de la racine carrée $(\sqrt{\Delta})$ est fixée par les formules:

$$(\sqrt{\Delta}) = |\sqrt{\Delta}| \tag{174}$$

pour $\Delta > 0$, et

$$(\sqrt{\Delta}) = i|\sqrt{-\Delta}| \tag{175}$$

pour $\Delta < 0$.

Cela posé, nous généraliserons les nombres et les fonctions de BERNOULLI, conformément au théorème IX, par les définitions suivantes:

Définition 3. En développant l'expression

$$\frac{v}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de v, nous obtiendrons pour $|v| < 2\pi$ une équation de la forme

$$\frac{v}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = B(0, \Delta) + B(1, \Delta)v + B(2, \Delta)v^2 + \ldots, \tag{176}$$

et nous appellerons les coefficients $B(0, \Delta), B(1, \Delta), B(2, \Delta), \ldots$ les nombres Bernoulliens appartenant au discriminant Δ.

Définition 4. En développant pour $|v| < 2\pi$ la fonction

$$v \frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de v, nous aurons une équation de la forme

$$v \frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} \tag{177}$$

$$= \varphi(z, 0, \Delta) + \varphi(z, 1, \Delta)v + \varphi(z, 2, \Delta)v^2 + \ldots,$$

et nous appellerons les coefficients $\varphi(z, 0, \Delta), \varphi(z, 1, \Delta), \varphi(z, 2, \Delta), \ldots$ les fonctions Bernoulliennes appartenant au discriminant Δ.

Au moyen de la formule (170) l'équation (176) peut être mise sous la forme

$$(178)\qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)v\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}-1}{e^v-1}=\sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k$$

ou, en y appliquant l'équation (93),

$$(179)\qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,\,k\right)v^k=\sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k,$$

d'où l'on tire, en renversant l'ordre des deux membres,

$$(180)\qquad \sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k=\sum_{k=0}^{k=\infty}v^k\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,\,k\right).$$

En égalant les uns aux autres les coefficients de v^m dans les deux membres de cette équation, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(181)\qquad B(m\,,\,\Delta)=\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,\,m\right),$$

et des équations (24) et (181) on déduit les formules

$$(182)\qquad B(0,\Delta)=0,\qquad B(m,\Delta)=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{B(m-k)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k\,.\,(\varepsilon\Delta)^k}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^k$$

pour $m \geqq 1$.

De ces équations on peut conclure, que les nombres Bernoulliens $B(m\,,\,\Delta)$ sont des quantités rationnelles. Mettons maintenant l'équation (181) sous la forme

$$(183)\qquad B(m,\Delta)=\sum_{r=1}^{r<\frac{\varepsilon\Delta}{2}}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)+\sum_{r>\frac{\varepsilon\Delta}{2}}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)$$

et introduisons dans la seconde somme $\varepsilon\Delta-r$ au lieu de r, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(184)\qquad B(m\,,\,\Delta)=\sum_{r=1}^{r<\frac{\varepsilon\Delta}{2}}\left\{\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)+\left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta-r}\right)\varphi\left(1-\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)\right\},$$

d'où l'on tire pour $m \geqq 2$, en y appliquant les équations (49) et (172),

(185) $$B(m, \Delta) = \{1 + \varepsilon(-1)^m\} \sum_{r=1}^{r<\frac{\varepsilon\Delta}{2}} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Si l'on désigne par n un nombre entier positif, on obtiendra des équations (184) et (185) pour $\Delta > 0$

(186) $$B(2n - 1, \Delta) = 0,$$

et pour $\Delta < 0$

(187) $$B(2n, \Delta) = 0.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (173), nous aurons pour $\Delta > 0$

(188) $$\sum_{r=1}^{r=\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \cos\frac{2k\pi r}{\Delta} = \left(\frac{\Delta}{k}\right) |\sqrt{\Delta}|,$$

et pour $\Delta < 0$

(189) $$\sum_{r=1}^{r=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sin\frac{2k\pi r}{-\Delta} = \left(\frac{\Delta}{k}\right) |\sqrt{-\Delta}|.$$

Substituons dans la somme

$$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}},$$

$\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r, nous en déduirons

(190) $$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta - r}\right) e^{v - \frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

où, d'après la formule (172),

(191) $$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \varepsilon \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta} + v},$$

d'où l'on tire

(192) $$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} + \varepsilon e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta} + v} \right\}$$

et, par conséquent,

$$(193)\qquad \frac{v}{e^v - 1}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \frac{v}{2}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}-\frac{v}{2}} + \varepsilon e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}}.$$

Des équations (176) et (193) on déduit

$$(194)\qquad \sum_{k=0}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta)v^k = \frac{v}{2}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}-\frac{v}{2}} + \varepsilon e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}}.$$

Distinguons maintenant les deux cas suivants:

1) Pour $\Delta > 0$ nous obtiendrons de l'équation (99) par les substitutions

$$a = \frac{v}{2\pi}, \qquad z = \frac{r}{\Delta}$$

la formule

$$(195)\qquad \frac{v}{2}\cdot\frac{e^{\frac{rv}{\Delta}-\frac{v}{2}} + e^{-\frac{rv}{\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}} = 1 + 2v^2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos\frac{2k\pi r}{\Delta}}{v^2 + 4k^2\pi^2},$$

qui subsiste pour $0 < r < \Delta$, et des équations (194) et (195) on tire

$$(196)\qquad \sum_{k=0}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta)v^k = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2v^2}{v^2 + 4k^2\pi^2}\sum_{r=1}^{r=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cos\frac{2k\pi r}{\Delta}$$

ou, suivant l'équation (188),

$$(197)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta)v^k = 2|\sqrt{\Delta}|\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\left(\frac{v}{2k\pi}\right)^2\frac{1}{1 + \left(\frac{v}{2k\pi}\right)^2}$$

et, par suite,

$$(198)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta)v^k = 2|\sqrt{\Delta}|v^2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{(2k\pi)^2} - 2|\sqrt{\Delta}|v^4\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{(2k\pi)^4}$$
$$+ 2|\sqrt{\Delta}|v^6\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{(2k\pi)^6} - \cdots.$$

En égalant les uns aux autres les coefficients de v^m dans les deux

membres de cette équation, nous retrouverons la formule (186), et du reste nous obtiendrons, en désignant par n un nombre entier positif,

$$(199)\qquad B(2n\,,\,\Delta) = \frac{2(-)^{n-1}|\sqrt{\Delta}|}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}}.$$

De cette formule on peut conclure que pour $\Delta > 0$ le nombre $B(2n, \Delta)$ a le même signe que $(-1)^{n-1}$.

2) Pour $\Delta < 0$ nous obtiendrons de l'équation (100) par les substitutions

$$a = \frac{v}{2\pi}, \qquad z = -\frac{r}{\Delta}$$

la formule

$$(200)\qquad \frac{v}{2}\cdot\frac{e^{-\frac{rv}{\Delta}-\frac{v}{2}} - e^{\frac{rv}{\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}} = -4\pi v \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k \sin\frac{2k\pi r}{-\Delta}}{v^2 + 4k^2\pi^2},$$

qui est vraie pour $0 < r < -\Delta$, et des équations (194) et (200) on déduit

$$(201)\qquad \sum_{k=0}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta) v^k = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4\pi v k}{v^2 + 4k^2\pi^2} \sum_{r=1}^{r=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sin\frac{2k\pi r}{-\Delta}$$

ou, d'après l'équation (189),

$$(202)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta) v^k = -2|\sqrt{-\Delta}| \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{v}{2k\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{2k\pi}\right)^2}$$

ou

$$(203)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta) v^k = -2|\sqrt{-\Delta}|v \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{2k\pi} + 2|\sqrt{-\Delta}|v^3 \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{(2k\pi)^3}$$
$$- 2|\sqrt{-\Delta}|v^5 \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{(2k\pi)^5} + \dots.$$

Egalons les coefficients de v^m dans les deux membres de cette équation, nous retrouverons la formule (187), et du reste nous obtiendrons, n étant un nombre entier positif,

$$(204)\qquad B(2n-1\,,\,\Delta) = \frac{2(-1)^n|\sqrt{-\Delta}|}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n-1}}.$$

De cette formule on conclura que pour $\Delta < 0$ le nombre $B(2n - 1, \Delta)$ a le même signe que $(-1)^n$.

Les quatre équations (186), (187), (199), (204) peuvent être remplacées par la seule formule

$$(205) \qquad B(m, \Delta) = -\frac{\{1 + \varepsilon(-1)^m\}(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^m},$$

et des équations (181), (182), (205) résulte le théorème suivant:

Théorème XV. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental quelconque et par ε le signe du nombre Δ, en sorte que

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon\Delta > 0,$$

les nombres Bernoulliens $B(0, \Delta)$, $B(1, \Delta)$, $B(2, \Delta)$, ... sont des quantités réelles et rationnelles, et l'on aura pour $m \geqq 0$

$$B(m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right),$$

et pour $m \geqq 1$ on aura

$$B(m, \Delta) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \cdot (\varepsilon\Delta)^k} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^k$$

et

$$B(m, \Delta) = -\frac{\{1 + \varepsilon(-1)^m\}(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^m}.$$

Corollaire 1. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental positif et par n un nombre entier positif, l'expression

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}}$$

est une quantité rationnelle.

Corollaire 2. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental négatif et par n un nombre entier positif, l'expression

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{\pi^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n-1}}$$

est une quantité rationnelle.

De l'équation (176) on tire

$$(206) \qquad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

$$=\left(\frac{zv}{1}+\frac{z^2v^2}{1\,.\,2}+\frac{z^3v^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\right)[B(0\,,\,\Delta)+B(1\,,\,\Delta)v+B(2\,,\,\Delta)v^2+\ldots]$$

ou, en exécutant le produit dans le second membre,

$$(207) \quad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}=\frac{B(0\,,\,\Delta)z}{1}v+\left\{\frac{B(0\,,\,\Delta)z^2}{1\,.\,2}+\frac{B(1\,,\,\Delta)z}{1}\right\}v^2$$

$$+\left\{\frac{B(0\,,\,\Delta)z^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{B(1\,,\,\Delta)z^2}{1\,.\,2}+\frac{B(2\,,\,\Delta)z}{1}\right\}v^3+\ldots.$$

Egalons les coefficients de v^m dans les seconds membres des équations (177) et (207), nous aurons

$$(208) \qquad \varphi(z\,,\,0\,,\,\Delta)=0, \qquad \varphi(z\,,\,m\,,\,\Delta)=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{B(m-k\,,\,\Delta)z^k}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$$

pour $m \geqq 1$, et de ces équations on déduit pour $m \geqq 0$

$$(209) \qquad \varphi(0\,,\,m\,,\,\Delta)=0.$$

Des formules (208) on peut conclure que les fonctions Bernoulliennes $\varphi(z\,,\,m\,,\,\Delta)$ sont des fonctions entières, dont les coefficients sont des nombres rationnels. En mettant l'équation (177) sous la forme

$$(210) \qquad \sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi(z\,,\,k\,,\,\Delta)v^k=\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{v\frac{e^{\left(z+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)v}-1}{e^v-1}-v\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}-1}{e^v-1}\right\},$$

et en y appliquant l'équation (93), nous aurons

$$(211) \quad \sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi(z\,,k\,,\,\Delta)v^k=\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{\sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi\left(z+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,k\right)v^k-\sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,k\right)v^k\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{k=\infty}v^k\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{\varphi\left(z+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,k\right)-\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,k\right)\right\}.$$

En égalant les coefficients de v^m dans les deux membres de cette équation, on aura pour $m \geqq 0$

$$(212) \qquad \varphi(z, m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\},$$

et des équations (181) et (212) on tire pour $m \geqq 0$

$$(213) \qquad \varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Remplaçons dans l'équation (213) m par $m+1$, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(214) \quad \varphi(z, m+1, \Delta) = -B(m+1, \Delta) + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m+1\right)$$

et par suite, en différentiant par rapport à z,

$$(215) \qquad \varphi'(z, m+1, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi'\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m+1\right)$$

ou, par application de la formule (5),

$$(216) \qquad \varphi'(z, m+1, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ B(m) + \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Des équations (213) et (216) on tire pour $m \geqq 0$

$$(217) \qquad \varphi'(z, m+1, \Delta) = \varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta).$$

De l'équation (213) on obtiendra pour $m \geqq 1$

$$(218) \qquad \varphi(z+1, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(z + 1 + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\}$$

et par suite, en y appliquant l'équation (50),

$$(219) \quad \varphi(z+1, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) = \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}.$$

Remplaçons dans l'équation (212) z par $-z$, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(220)\qquad \varphi(-z, m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(-z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\},$$

d'où l'on tire, en y substituant $\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r et en employant l'équation (172),

$$(221)\qquad \varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(1 - z - \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(1 - \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\};$$

pour $m \geqq 2$ on en déduit par application de l'équation (49)

$$(222)\qquad \varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon(-1)^m \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\},$$

et des équations (212) et (222) on obtiendra pour $m \geqq 2$

$$(223)\qquad \varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon(-1)^m \varphi(z, m, \Delta),$$

formule qui subsiste encore pour $m = 0$ et pour $m = 1$, car d'après les équations (208) on a

$$(224)\qquad \varphi(z, 0, \Delta) = 0, \qquad \varphi(z, 1, \Delta) = 0.$$

De ce qui précède résulte ce théorème:

Théorème XVI. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental quelconque et par ε le signe du nombre Δ, en sorte que

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon\Delta > 0,$$

les fonctions Bernoulliennes $\varphi(z, 0, \Delta)$, $\varphi(z, 1, \Delta)$, $\varphi(z, 2, \Delta)$, ... sont des fonctions entières dont les coefficients sont des nombres rationnels, et ces fonctions jouissent des propriétés suivantes:

$$\varphi(z, 0, \Delta) = 0, \qquad \varphi(z, m, \Delta) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k, \Delta) z^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \quad \text{pour } m \geqq 1,$$

$$\varphi(0, m, \Delta) = 0 \quad \text{pour } m \geqq 0,$$

$$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \quad \text{pour } m \geqq 0,$$

$$\varphi'(z, m+1, \Delta) = \varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta) \quad \text{pour } m \geqq 0,$$

$$\varphi(z+1, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) = \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$\text{pour } m \geqq 1,$$

$$\varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon(-1)^m \varphi(z, m, \Delta) \quad \text{pour } m \geqq 0.$$

En remplaçant z par $z+s$ dans la formule (219), nous en obtiendrons pour $m \geqq 1$

$$(225) \qquad \sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z + \frac{r+s\varepsilon\Delta}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$= \Gamma(m)\{\varphi(z+s+1, m, \Delta) - \varphi(z+s, m, \Delta)\}$$

ou d'après l'équation (171), k étant un nombre entier positif,

$$\sum_{s=0}^{s=k-1} \sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r+s\varepsilon\Delta}\right)\left(z + \frac{r+s\varepsilon\Delta}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$= \Gamma(m) \sum_{s=0}^{s=k-1} \{\varphi(z+s+1, m, \Delta) - \varphi(z+s, m, \Delta)\}.$$

Posons dans le premier membre de cette équation

$$r + s\varepsilon\Delta = h,$$

nous en déduirons pour $m \geqq 1$ la formule

$$(226) \qquad \sum_{h=0}^{h=k\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right)\left(z + \frac{h}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z+k, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta)\},$$

ce qui démontre ce théorème:

Théorème XVII. Soit Δ un discriminant fondamental, et ε le signe du nombre Δ, et désignons par m et k deux nombres entiers positifs, on aura

$$\sum_{h=0}^{h=k\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right)\left(z + \frac{h}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z+k, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta)\}.$$

Pour $z = 0$ on en déduit

$$(227) \qquad \sum_{h=0}^{h=k\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right) h^{m-1} = \Gamma(m)(\varepsilon\Delta)^{m-1}\varphi(k, m, \Delta),$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$, $k \geqq 1$.

Désignons maintenant par x une quantité réelle quelconque, nous obtiendrons du théorème XII et de l'équation (170)

$$(228) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i} + (-1)^m e^{-2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i}}{k^m}$$

$$= - \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

$$- \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

ou

$$(229) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^m}\left\{e^{2k\pi x i} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}} + (-1)^m e^{-2k\pi x i} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{-\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}}\right\}$$

$$= - \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

$$- \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}.$$

D'après l'équation (173) on a

$$(230) \qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta})$$

et, par conséquent, en introduisant dans le premier membre $\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r et en employant l'équation (172),

$$(231) \qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{-\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}} = \varepsilon\left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta}).$$

Des équations (229), (230), (231) nous tirons

(232)
$$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi x i}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$
$$=-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XVIII. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, de sorte que

$$\varepsilon = \pm 1 \text{ , } \varepsilon\Delta > 0,$$

et désignons par x une quantité réelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, on aura

$$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi x i}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$
$$=-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}.$$

Corollaire. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque et ε le signe du nombre Δ, et désignons par x une quantité réelle et rationnelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, l'expression

$$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi x i}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$

est une quantité réelle et rationnelle.

Au moyen de l'équation (232) nous développerons la fonction $\varphi(z, m, \Delta)$ en série, et pour ce but nous distinguerons les deux cas suivants:

1) Pour $m \geqq 2$ la dernière somme du second membre de l'équation (232) est nulle d'après l'équation (101), et en désignant par z une quantité qui satisfait aux conditions

(233) $$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

on aura évidemment pour $r = 1, 2, 3, \ldots, \varepsilon\Delta - 1$

(234) $$0 \leqq z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} \leqq 1;$$

puisque on a

$$\varphi(0, m) = \varphi(1, m),$$

on en obtiendra

(235) $$\varphi\left\{z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\} = \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Cela établi, introduisons dans l'équation (232) $x = z$, nous en tirerons

(236) $$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m} = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right)$$

et par suite, d'après l'équation (213),

(237) $$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) - \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m},$$

formule qui subsiste pour

$$m \geqq 2, \quad -\frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\varepsilon\Delta}.$$

2) Pour $m = 1$ on a

$$\varphi(z, 1) = z,$$

et de l'équation (232) on obtiendra pour toutes les valeurs réelles de x

(238) $$\frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} - \varepsilon e^{-2k\pi x i}}{k}$$
$$= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)\right\}$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \mu\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}.$$

En désignant par z une quantité qui satisfait aux inégalités

(239) $$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

on aura pour $r = 1, 2, 3, \ldots, \varepsilon\Delta - 1$

(240) $$0 < z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} < 1,$$

et, par conséquent,

(241) $$E\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right) = 0,$$

et de l'équation (103) on tire

(242) $$\mu\left\{z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\} = 0.$$

Cela posé, substituons dans l'équation (238) $x = z$, nous en déduirons

(243) $$\frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi z i} - \varepsilon e^{-2k\pi z i}}{k} = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)$$
$$= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, 1\right)$$

et, par suite, d'après l'équation (213),

(244) $$\varphi(z, 1, \Delta) = -B(1, \Delta) - \frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi z i} - \varepsilon e^{-2k\pi z i}}{k},$$

formule qui subsiste pour

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta}.$$

Des équations (237) et (244) résulte ce théorème:

Théorème XIX. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, de sorte que

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon\Delta > 0,$$

et désignons par z une quantité qui satisfait aux inégalités

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

et par m un nombre entier positif quelconque, on aura

$$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) - \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m};$$

pour $m \geqq 2$ cette formule subsiste encore pour $z = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}$ et pour $z = \frac{1}{\varepsilon\Delta}$.

Si l'on désigne par n un nombre entier positif, nous obtiendrons de ce théorème et des équations (186) et (187) pour $\Delta > 0$

$$(245) \qquad \varphi(z, 2n-1, \Delta) = \frac{2(-1)^n |\sqrt{\Delta}|}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n-1}},$$

$$(246) \qquad \varphi(z, 2n, \Delta) = -B(2n, \Delta) - \frac{2(-1)^n |\sqrt{\Delta}|}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n}},$$

et pour $\Delta < 0$

$$(247) \quad \varphi(z, 2n-1, \Delta) = -B(2n-1, \Delta) + \frac{2(-1)^n |\sqrt{-\Delta}|}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n-1}},$$

$$(248) \qquad \varphi(z, 2n, \Delta) = \frac{2(-1)^n |\sqrt{-\Delta}|}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n}}.$$

Ces quatre formules sont vraies pour tous les nombres entiers positifs n et pour

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

excepté que pour $n = 1$ les équations (245) et (247) subsistent seulement pour

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta}.$$

En définissant pour toutes les valeurs réelles de la variable x une fonction $F(x)$ au moyen de l'équation

$$(249) \qquad F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} - \varepsilon e^{-2k\pi x i}}{k},$$

cette fonction aura évidemment les propriétés suivantes:

$$(250) \qquad F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = -\varepsilon F(x),$$

et des équations (238) et (170) on tire

$$(251)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}.$$

Si l'on désigne par x_0 une quantité qui satisfait aux conditions

$$(252)\qquad 0 \leqq x_0 < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

on obtiendra des équations (251) et (103)

$$(253)\qquad F(x_0) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r.$$

Cela établi, soit x une quantité réelle, et supposons que

$$(254)\qquad \frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq x < 1,$$

on peut mettre x sous la forme

$$(255)\qquad x = x_0 + \frac{s}{\varepsilon\Delta},$$

où x_0 satisfait aux inégalités (252), et où s est un nombre entier qui satisfait aux conditions

$$(256)\qquad 1 \leqq s \leqq \varepsilon\Delta - 1,$$

et de l'équation (255) on tire

$$(257)\qquad s = E(x\varepsilon\Delta).$$

Des équations (251) et (255) on déduit

$$(258)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)E\left(x_0+\frac{s+r}{\varepsilon\Delta}\right)$$
$$-\sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x_0+\frac{s+r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x_0+\frac{s+r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}$$

ou, en remplaçant r par $\varepsilon\Delta - r$ dans les deux dernières sommes et en employant les équations (170) et (172)

$$(259)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}r + \varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right)$$
$$-\varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}\mu\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right) . 1\right\}.$$

Puisque on a évidemment

$$(260)\qquad E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right) = 0$$

pour $r = 1, 2, 3, \ldots, s$, mais

$$(261)\qquad E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right) = -1$$

pour $r = s+1, s+2, \ldots, \varepsilon\Delta - 1, \varepsilon\Delta$, nous obtiendrons de l'équation (259)

$$(262)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}r - \varepsilon\sum_{r=s+1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}$$
$$-\varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}\mu\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}.$$

De l'équation (170) on tire

$$(263)\qquad \sum_{r=s+1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r} = -\sum_{r=0}^{r=s}\binom{\Delta}{r},$$

et, par suite, nous obtiendrons de l'équation (262)

$$(264)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}r + \varepsilon\sum_{r=0}^{r=s}\binom{\Delta}{r}$$
$$-\varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}\mu\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right) . 1\right\}.$$

Dans les cas, où x n'est pas multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$, on a d'après les équations (255) et (252)

$$0 < x_0 < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

et des équations (264) et (103) on déduit

(265) $$F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \varepsilon\sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right);$$

mais si x est multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$, on a

$$x_0 = 0,$$

et des équations (264), (102) et (103) on tire

(266) $$F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \varepsilon\sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\Delta}{s}\right).$$

Les équations (265) et (266) ont été démontrées sous la supposition que

(267) $$\frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq x < 1,$$

et le nombre s, qui se trouve dans ces équations, est déterminé par l'égalité

(268) $$s = E(x\varepsilon\Delta).$$

Mais ces formules sont encore vraies pour

(269) $$0 \leqq x < \frac{1}{\varepsilon\Delta};$$

on a, en effet, dans ce cas, d'après la formule (268)

(270) $$s = 0,$$

et, par conséquent, les formules (265) et (266) se réduisent à l'équation (253). Par là nous avons démontré ces formules pour

(271) $$0 \leqq x < 1,$$

et puisque les deux membres de ces formules ne se changent pas, en ajoutant à x un nombre entier positif quelconque, elles subsistent pour toutes les valeurs de x, qui satisfont à l'inégalité

$$x \geqq 0; \tag{272}$$

par suite nous pouvons énoncer ce théorème:

Théorème XX. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, et posons pour toutes les valeurs réelles de x

$$F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} - \varepsilon e^{-2k\pi x i}}{k},$$

nous aurons

$$F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = -\varepsilon F(x);$$

et en employant la notation

$$s = E(\varepsilon \Delta x),$$

nous aurons pour $x \geqq 0$

$$F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r + \varepsilon \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right),$$

si x n'est pas multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$, mais

$$F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r + \varepsilon \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\Delta}{s}\right),$$

si x est multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$.

En séparant les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (249), nous aurons pour $\Delta > 0$

$$F(x) = \frac{|\sqrt{\Delta}|}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi x}{k}, \tag{273}$$

et pour $\Delta < 0$

$$F(x) = \frac{|\sqrt{-\Delta}|}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi x}{k}; \tag{274}$$

et en observant, que pour $\Delta > 0$

$$\sum_{r=1}^{r=\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r = 0,$$

nous obtiendrons du théorème précédent pour $\Delta > 0$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{\Delta}|} \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right), \tag{275}$$

si x n'est pas multiple $\frac{1}{\Delta}$, mais

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{\Delta}|} \left\{ \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{s}\right) \right\}, \tag{276}$$

si x est multiple de $\frac{1}{\Delta}$, et pour $\Delta < 0$ nous aurons

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{-\Delta}|} \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{r=1}^{r=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r - \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \right\}, \tag{277}$$

si x n'est pas multiple de $-\frac{1}{\Delta}$, mais

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{-\Delta}|} \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{r=1}^{r=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r - \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{s}\right) \right\}, \tag{278}$$

si x est multiple de $-\frac{1}{\Delta}$.

Dans ces quatre formules, qui subsistent pour $x \geqq 0$, l'on désigne par s le plus grand des nombres entiers qui ne surpassent pas $\varepsilon\Delta x$.

Dans ce qui suit, nous traiterons de la même manière les cas où l'on a

$$m \geqq 2; \tag{279}$$

en posant pour ces valeurs du nombre m

$$F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}, \tag{280}$$

la fonction $F(x)$ aura évidemment les propriétés

$$F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = \varepsilon(-1)^m F(x), \tag{281}$$

et du théorème XVIII et de l'équation (101) nous obtiendrons pour toutes les valeurs réelles de la variable x

$$(282)\qquad F(x) = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon J-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}.$$

Cela posé, soit x_0 une quantité qui satisfait aux conditions (252), nous déduirons des équations (282) et (213)

$$(283)\quad F(x_0) = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon J-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x_0 + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) = -B(m, \Delta) - \varphi(x_0, m, \Delta).$$

En désignant par x une quantité qui satisfait aux inégalités (254), et en posant x sous la forme (255), nous tirerons de l'équation (282)

$$(284)\qquad F(x) = -\sum_{r=0}^{r=\varepsilon J-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x_0 + \frac{s+r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s+r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

ou, en introduisant dans la somme du second membre $\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r,

$$(285)\qquad F(x) = -\varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon J}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

et par suite, d'après les formules (260) et (261),

$$(286)\qquad F(x) = -\varepsilon\sum_{r=1}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varepsilon\sum_{r=s+1}^{r=\varepsilon J}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} + 1, m\right)$$

ou d'après l'équation (255), en appliquant la formule (50) à la première somme du second membre de l'équation (286),

$$(287)\qquad F(x) = -\varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon J}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x - \frac{r}{\varepsilon\Delta} + 1, m\right) + \frac{\varepsilon}{\Gamma(m)}\sum_{r=1}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(x - \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}.$$

Remplaçons dans la première somme du second membre de cette équation r par $\varepsilon\Delta - r$, nous en obtiendrons au moyen de l'équation (213)

$$(288)\qquad F(x) = -B(m, \Delta) - \varphi(x, m, \Delta) + \frac{\varepsilon}{\Gamma(m)} \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(x - \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}.$$

Pour la démonstration de cette formule nous avons supposé que

$$(289)\qquad \frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq x < 1,$$

et le nombre s, qui se trouve dans l'équation (288), est déterminé par l'égalité (257). Pour les valeurs de x qui satisfont aux conditions

$$(290)\qquad 0 \leqq x < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

on a évidemment

$$(291)\qquad s = 0,$$

et, par suite, on peut conclure de l'équation (283), que la formule (288) subsiste encore dans ce cas.

Nous avons donc démontré cette formule pour

$$(292)\qquad 0 \leqq x < 1,$$

et puisque, d'après les équations (281) et (219) les deux membres de cette formule restent invariables en ajoutant à x l'unité positive, l'équation (288) est vrai pour toutes les valeurs de la variable x qui satisfont à l'inégalité

$$(293)\qquad x \geqq 0,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XXI. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, et désignons par m un nombre entier supérieur ou égal à 2; en posant pour toutes les valeurs réelles de x

$$F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m},$$

on aura

$$F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = \varepsilon(-1)^m F(x),$$

et en employant la notation

$$s = E(\varepsilon\Delta x),$$

on aura pour $x \geqq 0$

$$F(x) = -B(m, \Delta) - \varphi(x, m, \Delta) + \frac{\varepsilon}{\Gamma(m)} \sum_{r=0}^{r=s} \binom{\Delta}{r} \left(x - \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}.$$

Nous avons démontré ce théorème pour $m \geqq 2$, mais puisque on a d'après les équations (181) et (224)

$$(294) \qquad B(1, \Delta) = \frac{1}{\varepsilon\Delta} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \binom{\Delta}{r} r, \qquad \varphi(x, 1, \Delta) = 0,$$

on peut conclure du théorème XX, que le théorème XXI subsiste encore pour $m = 1$ dans tous les cas où x n'est pas multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$.

Dans la première partie de ce mémoire, j'ai exposé les propriétés principales des nombres et des fonctions de Bernoulli. En terminant, j'indiquerai les travaux suivants sur ce sujet:

1. O. Schlömilch, *Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis.* Dritte Auflage 1879, p. 209—221.
2. Jules Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* 1886, p. 352—363.
3. O. Schlömilch, *Über die Bernoullische Funktion und deren Gebrauch bei der Entwickelung halbconvergenter Reihen.* (O. Schlömilch und B. Witzschel, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Erster Jahrgang 1856, p. 193—211.)
4. O. Schlömilch, *Über ein allgemeines Princip für Reihenentwickelungen.* (O. Schlömilch und B. Witzschel, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Zweiter Jahrgang 1857, p. 289—298.)
5. C. G. J. Jacobi, *De usu legitimo formulæ summatoriæ Maclaurinianæ.* (Journal de Crelle, t. 12, p. 263—272.)
6. Eisenlohe, *Entwickelung der Functionsweise der Bernoullischen Zahlen.* (Journal de Crelle, t. 28, p. 193—212.)

7. C. J. MALMSTEN, *Sur la formule*

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\Delta u^{\text{IV}}_x + \text{ etc.}$$

(Journal de Crelle, t. 35, p. 55—82.)

Ce mémoire à été réimprimé dans les Acta mathematica, t. 5, p. 1—46.

8. *Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob-Bernoullische Function.* Von Herrn Dr. RAABE (Journal de Crelle, t. 42, p. 348—367).

9. *Über die Darstellung gewisser Functionen durch die Euler'sche Summenformel.* Von Herrn RUDOLF LIPSCHITZ (Journal de Crelle, t. 56, p. 11—26).

10. *Von einigen Summen- und Differenzenformeln und den Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn G. BAUER (Journal de Crelle, t. 58, p. 292—300).

11. *Lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur la fonction de Jacob Bernoulli.* (Journal de Crelle, t. 79, p. 339—344.)

12. *Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt.* (Journal de Crelle, t. 81, p. 93—95.)

13. *Über eine Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn STERN in Göttingen (Journal de Crelle, t. 81, p. 290—294).

14. *Sur la formule de Maclaurin.* Extrait d'une lettre de M. HERMITE à M. BORCHARDT (Journal de Crelle, t. 84, p. 64—69).

15. *Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.* Auszug aus einem Schreiben an Herrn BORCHARDT. Von Herrn STERN in Göttingen (Journal de Crelle, t. 84, p. 267—269).

16. *Table of the values of the first sixty-two numbers of Bernoulli.* By Professor I. C. ADAMS, M. A.. F. R. S. at Cambridge (Journal de Crelle, t. 85, p. 269—272).

17. *Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn STERN in Göttingen (Journal de Crelle, t. 88, p. 85—95).

18. *Zur Theorie der Eulerschen Zahlen.* Von Herrn A. RADICKE in Bromberg (Journal de Crelle, t. 89, p. 257—261).

19. *Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn M. A. STERN in Göttingen (Journal de Crelle, t. 92, p. 349—350).

20. *Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* Von Herrn I. WORPITZKY (Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232).

21. *Über die Bernoullischen Zahlen.* (Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn WORPITZKY, S. 203 u. flgde.) Von KRONECKER (Journal de Crelle, t. 94, p. 268—269).

22. *Beiträge zu der Kenntniss der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn R. LIPSCHITZ in Bonn (Journal de Crelle, t. 96, p. 1—16).

23. *Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli*, par M. LEOPOLD

KRONECKER (Journal de mathématiques de LIOUVILLE. Deuxième Série, t. 1, p. 385—391).

24. *Beiträge zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* Von M. A. STERN (Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band 23. 1878).

25. *Beiträge zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* Zweiter Beitrag. Von M. A. STERN (Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band 26. 1880).

26. *Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel.* Von L. KRONECKER (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1885).

SUR DEUX THÉORÈMES RELATIFS AUX PROBABILITÉS

PAR

P. TCHEBYCHEFF

À S:t PÉTERSBOURG.

(Traduit du russe[1] par I. Lyon.)

§ 1. Dans un mémoire, sous le titre: *des valeurs moyennes,*[2] nous avons montré comment on obtient des *inégalités,* d'où l'on déduit facilement un théorème sur les probabilités qui contient comme cas particuliers le théorème de BERNOULLI et la loi des grands nombres. Ce théorème nous l'avons ainsi formulé:

Si les espérances mathématiques des quantités

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

et de leurs carrés

$$u_1^2, u_2^2, u_3^2, \ldots$$

ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique d'un nombre n de ces quantités et la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques sera moindre qu'une quantité donnée, se réduit à l'unité, lorsque n devient infini.

---

[1] О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей. Записки Академіи Наукъ. Томъ 55, книжка 2. Приложеніе, № 6. С.-Петербургъ. 1887.

[2] О среднихъ величинахъ. Математическій Сборникъ, т. 2. — Traduction française, Journal de Liouville, 2me série, tome 12.

Nous avons été conduit à ce résultat en cherchant à déterminer les valeurs limites d'une intégrale d'après les valeurs données des autres intégrales qui contiennent sous le signe $\int$, outre des fonctions connues, une fonction inconnue, assujettie à la seule condition de ne pas devenir négative entre les limites d'intégration. En développant la méthode employée dans ces recherches nous arrivons, dans un cas particulier, au théorème suivant sur les intégrales:[1]

Si la fonction $f(x)$ reste constamment positive et si l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{q^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = 0,$$

. . . .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-2} f(x)dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-3)}{q^{2m-2}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1} f(x)dx = 0,$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)dx$$

sera comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^2}{2(m-3)^2\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^2}{2(m-3)^2\sqrt{m-1}},$$

pour toutes les valeurs réelles de v.

---

[1] *Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales,* ce journal, t. 12, p. 287. (Traduction du mémoire: Объ интегральныхъ вычетахъ, доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ. Записки Академіи Наукъ, т. 55.)

Nous allons montrer maintenant, comment ce théorème sur les intégrales conduit à un théorème sur les probabilités, à l'aide duquel la détermination des valeurs les plus sûres des inconnues, quand on a un grand nombre d'équations qui contiennent des erreurs accidentelles plus ou moins considérables, se ramène à la méthode *des moindres carrés.* Ce théorème peut être ainsi formulé:

Si les espérances mathématiques des quantités

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ \ldots$$

sont toutes nulles et si les espérances mathématiques de toutes leurs puissances ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la somme d'un nombre n de ces quantités, divisée par la racine carrée de la double somme des espérances mathématiques de leurs carrés, sera comprise entre deux limites quelconques t et t', se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}\,dx$$

lorsque le nombre n devient infini.

§ 2. Pour démontrer ce théorème sous la forme la plus générale, nous prendrons $-\infty$ et $+\infty$ pour les limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs possibles des quantités

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ \ldots$$

En désignant par

$$\varphi_1(x)dx\,.\ \varphi_2(x)dx\,,\ \varphi_3(x)dx\,,\ \ldots$$

les probabilités que les valeurs des quantités $u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ \ldots$ sont comprises entre les limites infiniment voisines

$$x\,,\ x + dx,$$

nous remarquons:

1) que les fonctions

$$\varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \varphi_3(x)\,,\ \ldots$$

ne peuvent pas avoir des valeurs négatives;

2) que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(u_1)du_1\,,\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(u_2)du_2\,,\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_3(u_3)du_3\,,\ \ldots,$$

qui représentent les probabilités que les quantités $u_1, u_2, u_3, \ldots$ auront des valeurs quelconques comprises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, seront égales à l'unité;

3) que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_1\varphi_1(u_1)du_1\,,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_2\varphi_2(u_2)du_2\,,\ \int_{-\infty}^{\infty}u_3\varphi_3(u_3)du_3\,,\ \ldots,$$

qui représentent les espérances mathématiques des quantités $u_1, u_2, u_3, \ldots$, d'après notre hypothèse, doivent être nulles;

4) qu'en général, toutes les quantités $a_i^{(\mu)}$ définies par l'égalité

$$a_i^{(\mu)} = \int_{-\infty}^{\infty}u_i^{\mu}\varphi_i(u_i)\,du_i,$$

qui représentent les espérances mathématiques des différentes puissances des quantités $u_1, u_2, \ldots$, seront, par hypothèse, comprises entre des limites finies.

D'autre part, en désignant par

$$f(x)\,dx$$

la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}$$

sera comprise entre les limites infiniment voisines

$$x\,,\ x+dx,$$

nous remarquons que cette probabilité sera donnée par l'égalité

$$f(x)dx = \iint\ldots\int\varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)\ldots\varphi_n(u_n)du_1du_2\ldots du_n,$$

dans laquelle l'intégration par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_n$ s'étend sur toutes les valeurs de ces quantités pour lesquelles la valeur de la fraction

$$\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}$$

ne sort pas des limites infiniment voisines $x, x+dx$. En multipliant cette égalité membre à membre avec l'égalité

$$e^{sx} = e^{s\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}}$$

où s désigne une constante arbitraire quelconque, et en intégrant de $x = -\infty$ à $x = \infty$, nous trouvons l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x)dx = \iint\ldots\int e^{s\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)\ldots\varphi_n(u_n)du_1du_2\ldots du_n.$$

Comme dans le second membre l'intégration par rapport à

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

s'étend sur toutes les valeurs de ces quantités entre $-\infty$ et $+\infty$, le second membre de cette égalité se réduit au produit des intégrales simples

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)du_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2)du_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n)du_n.$$

Nous aurons donc l'égalité

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x)dx = \prod_{i=1}^{i=n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i)du_i.$$

En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de la constante arbitraire s et en égalant les coefficients des mêmes puissances de s, nous trouverons les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx, \ldots$$

qui représentent les espérances mathématiques des différentes puissances de la quantité

$$x = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}$$

et qui nous serviront à déterminer les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)dx$$

qui représente la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

ne dépassera pas la valeur d'une quantité quelconque v.

§ 3. En nous bornant à la détermination de $2m$ intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,,\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\,, \ldots,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx$$

nous remarquons que le premier membre de l'égalité (1), développé suivant les puissances de s jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1}, donnera la somme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{s}{1}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \frac{s^2}{1\,.\,2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-1}}{1\,.\,2\ldots(2m-1)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx.$$

Pour déterminer les termes correspondants dans le second membre, nous allons le mettre sous la forme

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i)du_i}$$

et l'on voit que le développement du second membre de (1), rigoureux jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1} inclusivement, s'obtiendra en y remplaçant les logarithmes par leurs développements en séries arrêtés aux termes de l'ordre s^{2m-1}. Pour déterminer les développements de ces logarithmes, nous remarquons que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i)du_i$$

sera donnée par l'expression approximative suivante, rigoureuse jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1} inclusivement:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(u_i)du_i + \frac{s}{1\,.\,\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} u_i\varphi_i(u_i)du_i + \frac{s^2}{1\,.\,2\,.\,(\sqrt{n})^2}\int_{-\infty}^{\infty} u_i^2\varphi_i(u_i)du_i + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-1}}{1\cdot 2\ldots(2m-1)(\sqrt{n})^{2m-1}}\int_{-\infty}^{\infty} u_i^{2m-1}\varphi_i(u_i)du_i$$

et cette expression, d'après le § 2, se réduit à

$$1 + \frac{a_i^{(2)}}{1\,.\,2\,.\,(\sqrt{n})^2}s^2 + \frac{a_i^{(3)}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,(\sqrt{n})^3}s^3 + \ldots + \frac{a_i^{(2m-1)}}{1\,.\,2\ldots(2m-1)(\sqrt{n})^{2m-1}}s^{2m-1}$$

où, par hypothèse, les quantités a_i sont toutes finies. En développant le logarithme de cette expression suivant les puissances de s et en s'arrêtant au terme de l'ordre s^{2m-1}, nous trouverons une expression de la forme

$$\frac{a_i^{(2)}}{2(\sqrt{n})^2}s^2 + \frac{A_i^{(3)}}{(\sqrt{n})^3}s^3 + \ldots + \frac{A_i^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-1}}s^{2m-1},$$

dans laquelle les quantités A_i seront des fonctions entières des quantités a_i ne contenant pas n; elles seront donc aussi toutes finies.

On aura donc, avec un degré d'approximation jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1} inclusivement

$$\log\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}}\varphi_i(u_i)\,du_i = \frac{a_i^{(2)}}{2(\sqrt{n})^2}s^2 + \frac{A_i^{(3)}}{(\sqrt{n})^3}s^3 + \ldots + \frac{A_i^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-1}}s^{2m-1}.$$

En y faisant $i = 1, 2, \ldots, n$ et en posant

$$\frac{a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)}}{n} = \frac{1}{q^2},$$

$$\frac{A_1^{(3)} + A_2^{(3)} + \ldots + A_n^{(3)}}{n} = M^{(3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{A_1^{(2m-1)} + A_2^{(2m-1)} + \ldots + A_n^{(2m-1)}}{n} = M^{(2m-1)},$$

on trouve, avec le même degré d'approximation,

$$\sum_{i=1}^{i=n}\log\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}}\varphi_i(u_i)\,du_i = \frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}}s^3 + \ldots + \frac{M^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-3}}s^{2m-1},$$

où les quantités M, comme les moyennes arithmétiques des quantités finies $A_1, A_2, \ldots, A_n$, seront aussi toutes finies. On aura donc, avec un degré d'approximation jusqu'au terme de l'ordre s^{2m-1},

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x)\,dx = e^{\frac{s^2}{2q^2} + \frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}}s^3 + \ldots + \frac{M^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-3}}s^{2m-1}}.$$

§ 4. Quel que soit n, nous pourrons tirer de cette égalité les valeurs de $2m$ intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \ldots, \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx,$$

en arrêtant les développements des deux membres de cette égalité aux termes de l'ordre s^{2m-1}.

Dans le cas particulier de $n = \infty$, l'égalité (2) se réduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}f(x)dx = e^{\frac{s^2}{2q^2}},$$

puisque les quantités M, comme on a vu, sont toutes finies. En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de s et en s'arrêtant aux termes de l'ordre s^{2m-1}, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{s}{1}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \frac{s^2}{1 \cdot 2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-1}}{1 \cdot 2 \ldots (2m-1)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx = 1 + \frac{s^2}{2q^2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2(2q^2)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-2}}{1 \cdot 2 \ldots (m-1)(2q^2)^{m-1}},$$

et en égalant les coefficients des mêmes puissances de s, nous trouvons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \frac{1}{q^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^3f(x)dx = 0,$$

. . . .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-2}f(x)dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-3)}{q^{2m-2}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx = 0.$$

Comme la fonction $f(x)$ qui figure sous le signe $\int$, par sa nature

même, ne peut pas avoir des valeurs négatives, nous concluons, d'après le théorème sur les intégrales cité au § 1, que la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)dx$$

est comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

D'où, en remarquant que la valeur de la fraction

$$\frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

tend vers zéro lorsque le nombre m augmente indéfiniment, nous tirons l'égalité

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx.$$

En y faisant successivement

$$v = \frac{\sqrt{2}}{q}t, \qquad v = \frac{\sqrt{2}}{q}t'$$

nous trouvons les égalités

$$\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2}dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t'} e^{-x^2}dx.$$

qui par la soustraction nous donnent

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{q}t}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx.$$

Le premier membre de cette égalité, d'après le § 2, représente la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

sera comprise entre les limites $\frac{\sqrt{2}}{q}t$ et $\frac{\sqrt{2}}{q}t'$, et par conséquent la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{\frac{2n}{q^2}}} = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre les limites t et t'; en vertu de quoi cette égalité qui a lieu pour $n = \infty$ montre que la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre deux limites quelconques t et t', a pour limite lorsque n augmente indéfiniment la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx.$$

C. Q. F. D.

Dans le cas de n fini, la probabilité que la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre les limites t et t', différera plus ou moins de sa valeur limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx,$$

selon la valeur de n et des quantités

$$q\,,\; M^{(3)}\,,\; \ldots\,,\; M^{(2m-1)}$$

qui figurent dans l'égalité (2) et dont les valeurs, comme on a vu, dépendent des valeurs des espérances mathématiques des différentes puissances des quantités

$$u_1\,,\; u_2\,,\; \ldots\,,\; u_n.$$

Sans nous arrêter ici à la détermination de la limite supérieure de cette différence pour n assez grand, nous remarquerons seulement que, d'après les formules de notre mémoire *sur le développement des fonctions à une seule variable,*[1] cette probabilité pour n quelconque sera donnée par l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'}\left[1 - K_3\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3\psi_3(x) + K_4\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^4\psi_4(x) + \ldots\right]e^{-x^2}dx$$

dans laquelle les quantités $K_3\,, K_4\,, \ldots$ sont les coefficients de s^3, s^4, ... dans le développement de la fonction

$$e^{\frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}}s^3 + \frac{M^{(4)}}{(\sqrt{n})^2}s^4 + \ldots}$$

suivant les puissances de s; et les fonctions

$$\psi_3(x)\,,\; \psi_4(x)\,,\; \ldots$$

sont des polynômes qui s'obtiennent par la formule

$$\psi_i(x) = e^{x^2}\frac{d^i e^{-x^2}}{dx^i}.$$

[1] Bulletin de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg, tome I. 1859.

ÜBER DIE DARSTELLUNG DER DETERMINANTE EINES SYSTEMS

WELCHES AUS ZWEI ANDEREN COMPONIRT IST

VON

K. HENSEL

in BERLIN.

Aus den beiden Systemen variabler Elemente:

$$(1) \qquad (a_{h,i}),\ (b_{k,l}) \qquad \binom{h,i=1,2,\ldots,m}{k,l=1,2,\ldots,n}$$

denke man sich das dritte System von $(mn)^2$ Elementen:

$$(2) \qquad (c_{h,k}^{i,l}) = (a_{h,i}\,.\,b_{k,l})$$

so gebildet, dass den verschiedenen Werthecombinationen von h, k die Horizontalreihen, denen von i, l die Verticalreihen entsprechen.

Eine derartige Composition tritt sehr häufig bei arithmetisch-algebraischen Untersuchungen auf,[1] und es ist der Zweck der folgenden Zeilen, die Determinante des componirten Systems (2) durch diejenigen der componirenden Systeme auszudrücken.

Es seien nun:

$$D_a = |a_{h,i}|, \qquad D_b = |b_{k,l}|, \qquad D_{ab} = |a_{h,i}\,.\,b_{k,l}|$$

jene drei Determinanten; man erkennt dann unmittelbar, dass D_{ab} in Bezug auf die Elemente beider Systeme von der mn^{ten} Dimension ist, und sie

[1] Vgl. z. B. meine Arbeit *Über Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen,* Crelles Journal, Bd. 105, pag. 337.

kann von vorn herein so geordnet angenommen werden, dass sie sich auf das Glied:

$$(3)\qquad (a_{11}\dots a_{m,m})^n(b_{11}\dots b_{n,n})^m$$

reducirt, sobald alle Glieder mit ungleichen Indices verschwinden.

Bekanntlich verschwindet nun D_{ab} dann und nur dann, wenn die (mn) homogenen linearen Gleichungen:

$$(4)\qquad \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{h,k}\,.\,a_{h,i}\,.\,b_{k,l}=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\dots,m\\ l=1,\dots,n\end{pmatrix}$$

mindestens eine Lösung ausser der selbstverständlichen $x_{h,k}=0$ zulassen. Diese Gleichungen lassen sich aber auf zwei verschiedene Arten durch ein System von $2mn$ homogenen linearen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten ersetzen. Setzt man nämlich:

$$X_{h,l}=\sum_{k=1}^{n} x_{h,k}b_{k,l},\qquad Y_{k,i}=\sum_{h=1}^{m} x_{h,k}a_{h,i},\qquad \begin{pmatrix} h,i=1,2,\dots,m\\ k,l=1,2,\dots,n\end{pmatrix}$$

so ergeben sich für (4) die folgenden beiden äquivalenten Systeme:

$$(5^a)\qquad \sum_{h=1}^{m} a_{h,i}X_{h,l}=0,\qquad (5^b)\qquad \sum_{k=1}^{n} x_{h,k}b_{k,l}=X_{h,l},\qquad \begin{pmatrix} h,i=1,2,\dots,m\\ l=1,2,\dots,n\end{pmatrix}$$

$$(6^a)\qquad \sum_{k=1}^{n} b_{k,l}Y_{k,i}=0,\qquad (6^b)\qquad \sum_{h=1}^{m} x_{h,k}a_{h,i}=Y_{k,i}.\qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,m\\ k,l=1,2,\dots,n\end{pmatrix}$$

Ist nun zunächst $D_a.D_b$ von Null verschieden, so kann den (mn) Gleichungen (5^a), da ihre Determinante D_a nicht verschwindet, nur durch verschwindende Werthe der $X_{h,l}$ genügt werden, und diesen entsprechen auch nur verschwindende Werthe der $x_{h,k}$, da auch die Determinante D_b der Gleichungen (5^b) von Null verschieden ist. In diesem Falle ist also D_{ab} nicht Null.

Ist dagegen $D_a.D_b$ gleich Null, verschwindet also z. B. D_b, so ergiebt sich aus den Gleichungen (5^b) auch dann noch ein System von nicht verschwindenden Werthen für die $x_{h,k}$, wenn man alle $X_{h,l}$ gleich Null annimmt. Da also in diesem Falle die Gleichungen (5^a) und (5^b), oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (4) eine Lösung zulassen, so ergiebt sich das Verschwinden ihrer Determinante D_{ab}. Ist endlich D_a gleich Null,

so ergiebt sich durch dieselben Schlüsse dasselbe Resultat aus den Gleichungen (6ᵃ) und (6ᵇ).

Es ergiebt sich also der folgende Satz:

> Die Determinante D_{ab} des componirten Systems verschwindet dann und nur dann, wenn das Product der Determinanten der componirenden Systeme verschwindet.

Berücksichtigt man aber, dass die Elemente $a_{h,i}$ und $b_{k,l}$ unabhängige Variable sind, so ergiebt sich aus diesem Satze durch bekannte Schlüsse, dass D_{ab} mit D_a und D_b durch eine Gleichung:

$$(7) \qquad D_{ab} = cD_a^\lambda \, . \, D_b^\mu$$

verbunden ist, in welcher c eine noch zu bestimmende Constante und λ und μ ganzzahlige Exponenten sind. Setzt man hier voraus, dass in beiden Systemen alle Elemente verschwinden, deren Indices von einander verschieden sind, so ergiebt sich aus der Vergleichung von (7) mit (3):

$$c = 1, \qquad \lambda = n, \qquad \mu = m,$$

und man erhält die wichtige Determinantenrelation:

$$(8) \qquad |a_{h,i} \, . \, b_{k,l}| = |a_{h,i}|^n \, . \, |b_{k,l}|^m. \qquad \binom{h,\, i=1,2,\ldots,m}{k,\, l=1,2,\ldots,n}$$

Ich bemerke noch, dass Herr KRONECKER diesen Satz schon vor längerer Zeit in seinen algebraischen Vorlesungen angeführt und ihn durch eine elegante Umformung der zu untersuchenden Determinante mit Hülfe des Multiplicationssatzes bewiesen hat. Ferner hat Herr G. RADOS (Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen aus Ungarn, Bd. 4, pag. 268) dieselbe Aufgabe mit Hülfe der GRASSMANN'schen Theorie gelöst. Ich glaubte indessen diese Herleitung angeben zu sollen, da sie von den soeben erwähnten ganz verschieden und, wie mir scheint, völlig elementar ist.

Berlin den 12. Mai 1889.

ÜBER DIE CLASSENANZAHL

DER ZU EINER NEGATIVEN DETERMINANTE $D=-q$ GEHÖRIGEN

EIGENTLICH PRIMITIVEN QUADRATISCHEN FORMEN

WO q EINE PRIMZAHL VON DER FORM $4n+3$ IST

VON

JACOB HACKS

in MÜNCHEN.

Ist q eine Primzahl von der Form $4n + 3$, so ist die Classenanzahl h der zu der Determinante $D = -q$ gehörigen eigentlich primitiven quadratischen Formen gleich dem Überschuss der Anzahl der zwischen 0 und $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Reste von q über die Anzahl der zwischen 0 und $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Nichtreste von q (DIRICHLET, *Zahlentheorie,* 3. Auflage, p. 265), oder was dasselbe ist, gleich dem Überschuss der Anzahl der *unter* $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Reste von q über die Anzahl der *über* $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Reste von q. Bedeutet $[x]$ die grösste in einer Zahl x enthaltene ganze Zahl und setzt man

$$S = \sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{s^2}{q}\right],$$

$$S' = \sum_{s=1}^{s=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{2s^2}{q}\right],$$

so ist die Anzahl ρ' der über $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Reste von q gleich $S' - 2S$, wie sich leicht aus folgendem Satze ergibt: Liegt der kleinste positive Rest einer ganzen Zahl x nach dem Modul m unterhalb $\frac{m}{2}$, so ist $\left[\frac{2x}{m}\right] - 2\left[\frac{x}{m}\right] = 0$, ist derselbe $\geqq \frac{m}{2}$, so ist $\left[\frac{2x}{m}\right] - 2\left[\frac{x}{m}\right] = 1$ (Gauss' Werke, Band 2, p. 3). Die Anzahl ρ der *unter* $\frac{q}{2}$ liegenden quadratischen Reste von q ist demnach gleich $\frac{q-1}{2} - S' + 2S$. Hieraus ergibt sich für $h = \rho - \rho'$ der Ausdruck

$$h = \frac{q-1}{2} - 2S' + 4S. \tag{1}$$

Einen andern Ausdruck für h gewinnt man durch Anwendung eines in den Acta mathematica, Bd. 10, p. 18, begründeten Satzes, welcher lautet:

Eine Function $y = f(x)$ möge mit wachsendem x von $x = \mu$ bis $x = \mu'$ fortwährend zunehmen, wo μ und μ' ganze Zahlen bedeuten. Ferner sei $[f(\mu)] = \nu$, $[f(\mu')] = \nu'$ und $x = F(y)$ die aus $y = f(x)$ durch Umkehrung entstehende Function. Ist alsdann λ diejenige Zahl, welche angibt, wie viele unter den Functionswerten $f(\mu + 1), f(\mu + 2), \ldots, f(\mu')$ ganzzahlige Werte haben, so ist

$$\sum_{\mu+1}^{\mu'}[f(s)] + \sum_{\nu+1}^{\nu'}[F(s)] = -\mu\nu + \mu'\nu' + \lambda. \tag{2}$$

Wendet man diese Gleichung auf S an, so kommt

$$S + \sum_{1}^{\frac{q-3}{4}}[\sqrt{qs}] = \frac{(q-1)(q-3)}{8}. \tag{3}$$

Es geht dies daraus hervor, dass hier die in (2) mit λ bezeichnete Zahl verschwindet, und dass $\left[\frac{(q-1)^2}{4q}\right] = \frac{q-3}{4}$ ist. In ähnlicher Weise ergibt sich

$$S' + \sum_{1}^{\frac{q-3}{2}}\left[\sqrt{\frac{q}{2}s}\right] = \frac{q-1}{2}\,\frac{q-3}{2}. \tag{4}$$

Setzt man die aus (3) und (4) für S und S' sich ergebenden Werte in (1) ein, so wird

$$h = \frac{q-1}{2} + 2\sum_{1}^{\frac{q-3}{2}}\left[\sqrt{\frac{q}{2}s}\right] - 4\sum_{1}^{\frac{q-3}{4}}[\sqrt{qs}]. \tag{5}$$

Ohne Anwendung von Summenzeichen geschrieben lautet die Gleichung

$$\begin{aligned} h = \frac{q-1}{2} &+ 2\left(\left[\sqrt{\frac{q}{2}}\right] + \left[\sqrt{\frac{3q}{2}}\right] + \cdots + \left[\sqrt{\frac{q-5}{2}\frac{q}{2}}\right]\right) \\ &+ 2\left([\sqrt{q}] + [\sqrt{2q}] \qquad + \cdots + \left[\sqrt{\frac{q-3}{4}q}\right]\right) \\ &- 4\left([\sqrt{q}] + [\sqrt{2q}] \qquad + \cdots + \left[\sqrt{\frac{q-3}{4}q}\right]\right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} h = \frac{q-1}{2} + 2\Bigg(&\left[\sqrt{\frac{q}{2}}\right] - [\sqrt{q}] + \left[\sqrt{\frac{3q}{2}}\right] - [\sqrt{2q}] + \cdots \\ &+ \left[\sqrt{\frac{q-5}{2}\frac{q}{2}}\right] - \left[\sqrt{\frac{q-3}{4}q}\right], \end{aligned} \tag{6}$$ [1]

$$h = \frac{q-1}{2} - 2\sum_{1}^{\frac{q-3}{2}}(-1)^s\left[\sqrt{\frac{q}{2}s}\right]. \tag{7}$$

Da h als Classenanzahl stets positiv ist, so folgt aus (6) die Ungleichheit

$$\begin{aligned} &[\sqrt{q}] - \left[\sqrt{\frac{q}{2}}\right] + [\sqrt{2q}] - \left[\frac{3q}{2}\right] + \cdots \\ &+ \left[\sqrt{\frac{q-3}{4}q}\right] - \left[\sqrt{\frac{q-5}{2}\frac{q}{2}}\right] \leqq \frac{q-3}{4}. \end{aligned} \tag{8}$$

Wir stellen jetzt für Primzahlen von der Form $4n+1$ eine ähnliche Betrachtung an. Auch für Primzahlen p von der Form $4n+1$ hat der

[1] Herr Geh. Regierungs-Rat LIPSCHITZ hat mich vor längerer Zeit auf diese Umformung aufmerksam gemacht.

Überschuss $\rho - \rho'$ der Anzahl der *unter* $\frac{p}{2}$ liegenden quadratischen Reste über die Anzahl der *über* $\frac{p}{2}$ liegenden quadratischen Reste den Ausdruck

$$\rho - \rho' = \frac{p-1}{2} - 2S' + 4S,$$

wo in S und S' statt q überall p zu setzen ist. Es gelten jetzt die Gleichungen

$$S + \sum_{1}^{\frac{p-1}{4}} [\sqrt{sp}] = \frac{(p-1)^2}{8},$$

$$S' + \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\sqrt{s\frac{p}{2}}\right] = \frac{(p-1)^2}{4}.$$

Da für Primzahlen von der Form $4n+1$ die Differenz $\rho - \rho'$ verschwindet, so ergibt sich

$$\frac{p-1}{2} + 2\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\sqrt{s\frac{p}{2}}\right] - 4\sum_{1}^{\frac{p-1}{4}} [\sqrt{sp}] = 0,$$

und hieraus

$$(9) \qquad [\sqrt{p}] - \left[\sqrt{\frac{p}{2}}\right] + [\sqrt{2p}] - \left[\sqrt{3\frac{p}{2}}\right] + \cdots$$
$$+ \left[\sqrt{\frac{p-1}{4}p}\right] - \left[\sqrt{\frac{p-3}{2}\frac{p}{2}}\right] = \frac{p-1}{4}.$$

Diese Gleichung hat mit der Ungleichheit (8) eine grosse Ähnlichkeit. Fasst man auf der linken Seite immer je zwei aufeinanderfolgende Glieder in einen Term zusammen, so hat in (8) jeder Term durchschnittlich einen Wert, welcher $\leqq 1$ ist, während in (9) jeder Term durchschnittlich den Wert 1 hat.

Die Gleichung (9) behält ihre Gültigkeit auch für solche Zahlen m, welche aus lauter verschiedenen Primzahlen von der Form $4n+1$ zusammengesetzt sind. Der Beweis ist leicht zu führen.

Der Ausdruck (7) für die Classenanzahl h kann weiter umgeformt

werden mit Hülfe der im 10. Bande der Acta mathematica p. 19 aufgestellten Transformationsgleichung (3), welche unter Beibehaltung der in der obigen Gleichung (2) angewandten Notation folgende Gestalt hat:

$$\sum_{\mu+1}^{\mu'}[f(s)]\varphi(s) + \sum_{\nu+1}^{\nu'}\Psi[F(s)] = -\nu\Psi(\mu) + \nu'\Psi(\mu')$$
$$+ \varphi(s_1) + \varphi(s_2) + \ldots + \varphi(s_\lambda).$$

Hier bezeichnet $\varphi(s)$ eine beliebige Function, ferner sind $s_1, s_2, \ldots, s_\lambda$ diejenigen ganzzahligen zwischen $\mu + 1$ und μ' mit Einschluss beider Grenzen liegenden Argumente, für welche die Function $y = f(x)$ einen ganzzahligen Wert erhält, und es ist $\Psi(s) = \sum_1^s \varphi(s)$.

Setzt man in dieser Transformationsgleichung

$$\varphi(s)[f(s)] = (-1)^s\left[\sqrt{\frac{q}{2}s}\right]$$

und bedenkt, dass die Zahl λ verschwindet, so ergibt sich leicht

$$\sum_1^{\frac{q-3}{2}}(-1)^s\left[\sqrt{\frac{q}{2}s}\right] + \sum_1^{\frac{q-3}{2}}\sum_1^{\left[\frac{2s^2}{q}\right]}(-1)^s = \frac{q-3}{2}\sum_1^{\frac{q-3}{2}}(-1)^s.$$

Da $\frac{q-3}{2} = 2n$ eine gerade Zahl ist, so ist

$$\sum_1^{\frac{q-3}{2}}(-1)^s = 0,$$

also

$$\sum_1^{\frac{q-3}{2}}(-1)^s\left[\sqrt{\frac{q}{2}s}\right] + \sum_1^{\frac{q-3}{2}}\sum_1^{\left[\frac{2s^2}{q}\right]}(-1)^s = 0.$$

Demnach erhält die Classenanzahl h den Ausdruck

$$h = \frac{q-1}{2} + 2\sum_1^{\frac{q-3}{2}}\sum_1^{\left[\frac{2s^2}{q}\right]}(-1)^s.$$

Um für S' einen andern Ausdruck zu gewinnen, stellen wir folgende Reihen von Gleichungen auf:

$$2 \cdot 1^2 = \left[\frac{2 \cdot 1^2}{q}\right] q + r_1,$$

$$2 \cdot 2^2 = \left[\frac{2 \cdot 2^2}{q}\right] q + r_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2 \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 = \left[\frac{2 \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}{q}\right] q + r_{\frac{q-1}{2}}.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man

$$2 \sum_1^{\frac{q-1}{2}} s^2 = S'q + \sum_1^{\frac{q-1}{2}} r_s.$$

Nach einer bekannten Formel ist

$$\sum_1^{\frac{q-1}{2}} s^2 = \frac{q(q^2-1)}{24}.$$

Bezeichnet man die Summe der Reste (mod q) mit R, die Summe der Nichtreste mit R', so ist $\sum r_s = R$ oder $= R'$, je nachdem q von der Form $8n + 7$ oder von der Form $8n + 3$ ist. Es folgt dies aus dem Umstande, dass die Zahl 2 quadratischer Rest ist von den Primzahlen $q = 8n + 7$, quadratischer Nichtrest von den Primzahlen $q = 8n + 3$. Es sei nun zunächst die Primzahl q von der Form $8n + 7$, so ergibt sich

$$S' = \frac{q^2-1}{12} - \frac{R}{q}.$$

In ganz derselben Weise findet man (s. Acta mathematica, Bd. 10, p. 45)

$$S = \frac{q^2-1}{24} - \frac{R}{q}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (1) ein, so kommt

$$h = \frac{q-1}{2} - \frac{2R}{q},$$

oder mit Berücksichtigung der Relation

$$R + R' = \frac{q(q-1)}{2},$$

(10) $$h = \frac{R' - R}{q}.$$

Ist q eine Primzahl von der Form $8n + 3$, so findet man

$$S' = \frac{q^2 - 1}{12} - \frac{R'}{q},$$

$$S = \frac{q^2 - 1}{24} - \frac{R}{q},$$

$$h = \frac{q-1}{2} - \frac{4R}{q} + \frac{2R'}{q}$$

$$= 3\left(\frac{q-1}{2} - \frac{2R}{q}\right)$$

oder

(11) $$h = 3\,\frac{R' - R}{q}.$$

Die Gleichungen (10) und (11) lassen sich vereinigen in die Formel

(12) $$h = \left[2 - \left(\frac{2}{q}\right)\right]\frac{R' - R}{q},$$

wo $\left(\frac{2}{q}\right)$ das Legendre'sche Zeichen ist, (DIRICHLET, *Zahlentheorie,* p. 263). Aus (12) geht hervor, dass die Summe der Nichtreste grösser ist, als die Summe der Reste (cf. BOUNIAKOWSKY, *Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique* $E(x)$, Bulletin de l'Académie de St. Pétersbourg, tome 28, p. 425).

Zwischen den Zahlen ρ und ρ' einerseits und den Summen R und

R' andererseits finden sehr einfache Beziehungen statt. Ist nämlich q eine Primzahl von der Form $8n+7$, so ist

$$S'-2S=\frac{R}{q},$$

und da auch

$$S'-2S=\rho'$$

ist, so findet man

$$R=q\rho'$$

und vermöge der Relation

$$R+R'=\frac{q(q-1)}{2}=q(\rho+\rho'),$$

$$R'=q\rho.$$

Ist q von der Form $8n+3$, so findet man auf die nämliche Weise

$$2R'-R=q\rho,$$

$$2R-R'=q\rho'.$$

EINIGE ANWENDUNGEN DER FUNCTION $[x]$

VON

JACOB HACKS

in COBLENZ.

Wenn m eine beliebige Zahl ist, so soll die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$ bestimmt werden, welche durch ein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind.

Diejenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m, welche durch 2^2 teilbar sind, sind offenbar in der Anzahl $\left[\frac{m}{2^2}\right]$ vorhanden, wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bedeutet, ebenso die durch 3^2 teilbaren Zahlen in der Anzahl $\left[\frac{m}{3^2}\right]$. Die durch 4^2 teilbaren Zahlen sind in den durch 2^2 teilbaren Zahlen schon einbegriffen. In der Reihe von 1 bis m gibt es ferner $\left[\frac{m}{5^2}\right]$ Zahlen, welche durch 5^2 aufgehen. Wir haben also bis jetzt die Anzahl

$$\left[\frac{m}{2^2}\right] + \left[\frac{m}{3^2}\right] + \left[\frac{m}{5^2}\right].$$

Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass diejenigen Zahlen, welche bezw. durch 2^2 und 3^2, durch 2^2 und 5^2, durch 3^2 und 5^2 gleichzeitig aufgehen, zweimal mitgezählt worden sind. Es muss also die Zahl

$$\left[\frac{m}{2^2 \cdot 3^2}\right] + \left[\frac{m}{2^2 \cdot 5^2}\right] + \left[\frac{m}{3^2 \cdot 5^2}\right]$$

subtrahiert werden. Es ist jedoch wiederum der Umstand zu beachten, dass diejenigen Zahlen, welche durch 2^2, 3^2 und 5^2 zugleich teilbar sind, bis jetzt dreimal additiv und dreimal subtraktiv in Rechnung gekommen,

also noch gar nicht mitgerechnet sind. Demnach ist die Zahl $\left[\frac{m}{2^2.3^2.5^2}\right]$ zu addieren. Durch Fortsetzung dieser Betrachtung ergibt sich, wenn man die gesuchte Anzahl mit $p_2(m)$ bezeichnet, die Gleichung

$$(1)\qquad p_2(m) = \left[\frac{m}{2^2}\right] + \left[\frac{m}{3^2}\right] + \left[\frac{m}{5^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2.3^2}\right] + \left[\frac{m}{7^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2.5^2}\right]$$
$$+ \left[\frac{m}{11^2}\right] + \left[\frac{m}{13^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2.7^2}\right] \mp \ldots + \left[\frac{m}{2^2.3^2.5^2}\right] \pm \ldots.$$

Die Nenner sind die Quadrate derjenigen Zahlen, welche durch kein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind, die Einheit selbst ausgeschlossen. Das Vorzeichen eines jeden Gliedes ist $(-1)^{\rho-1}$, wo ρ die Anzahl der verschiedenen in dem betreffenden Nenner enthaltenen Primfaktoren bezeichnet. Die Allgemeingültigkeit der Gleichung (1) beruht auf dem bekannten Satze: Wenn λ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3} \pm \ldots + (-1)^{\lambda-1} = 1,$$

welcher aussagt, dass, wenn man von der Anzahl sämtlicher aus λ Elementen gebildeten Unionen die Anzahl sämtlicher Amben subtrahiert, dann zu der Differenz die Anzahl der Ternen positiv, die Anzahl der Quaternionen negativ hinzufügt u. s. w., das Ergebnis dieser Operationen die Einheit sein wird.

Bedeutet allgemein $p_n(m)$ die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, welche durch eine von der Einheit verschiedene n^{te} Potenz teilbar sind, so ergibt sich ganz auf die nämliche Weise

$$(2)\qquad p_n(m) = \left[\frac{m}{2^n}\right] + \left[\frac{m}{3^n}\right] + \left[\frac{m}{5^n}\right] - \left[\frac{m}{2^n.3^n}\right] \pm \ldots.$$

Mit Hülfe der Gleichung (1) lässt sich jetzt sofort die Anzahl $\Psi_2(m)$ derjenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m bestimmen, welche *nicht* durch ein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind, indem man die Anzahl $p_2(m)$ von der Zahl m subtrahiert. Es ist also

$$(3)\qquad \Psi_2(m) = \left[\frac{m}{1^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{5^2}\right] + \left[\frac{m}{2^2.3^2}\right] - \left[\frac{m}{7^2}\right] + \ldots:$$

Hier treten als Nenner die Quadrate aller derjenigen Zahlen auf, welche die Zahl m nicht übertreffen und durch kein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind. Das Vorzeichen jedes einzelnen Gliedes richtet sich nach der Anzahl der in der Basis des Nenners enthaltenen Primfaktoren; ist dieselbe ρ, so ist das Vorzeichen $(-1)^{\rho}$.

An diese Darstellung der Function $\Psi_2(m)$ schliesst sich ein interessanter Satz an. Dividiert man die Zahl m der Reihe nach durch die Quadrate der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, [\sqrt{m}]$, bildet von der in jedem Quotienten enthaltenen grössten ganzen Zahl die Function Ψ_2 und nimmt deren Summe, so erhält man wieder die Zahl m.

Zum Beweise dieses Satzes ist ein Hülfssatz erforderlich, welcher sich in Dirichlet's *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 28, findet und folgendermassen lautet:

Ist q die grösste in dem Bruche $\frac{c}{a}$ enthaltene ganze Zahl und q_1 die grösste in $\frac{q}{b}$ enthaltene ganze Zahl, so ist q_1 auch die grösste in dem Bruche $\frac{c}{ab}$ enthaltene ganze Zahl. In Zeichen:

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{c}{ab}\right].$$

Auf Grund dieses Satzes ist man berechtigt, folgende Gleichungen aufzustellen

$$\Psi_2(m) = \left[\frac{m}{1^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{5^2}\right] + \left[\frac{m}{6^2}\right] - \left[\frac{m}{7^2}\right] + \left[\frac{m}{10^2}\right] \pm \cdots$$

$$\Psi_2\left[\frac{m}{4}\right] = \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{4^2}\right] - \left[\frac{m}{6^2}\right] - \left[\frac{m}{10^2}\right] \pm \cdots$$

$$\Psi_2\left[\frac{m}{9}\right] = \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{6^2}\right] - \left[\frac{m}{9^2}\right] \mp \cdots$$

$$\Psi_2\left[\frac{m}{16}\right] = \left[\frac{m}{4^2}\right] - \left[\frac{m}{8^2}\right] + \cdots$$

$$\Psi_2\left[\frac{m}{25}\right] = \left[\frac{m}{5^2}\right] - \left[\frac{m}{10^2}\right] \mp \cdots$$

$$\Psi_2\left[\frac{m}{36}\right] = \left[\frac{m}{6^2}\right] \mp \cdots .$$

Die Addition aller dieser Gleichungen ergibt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes

$$(4)\qquad \Psi_2(m) + \Psi_2\left[\frac{m}{4}\right] + \Psi_2\left[\frac{m}{9}\right] + \Psi_2\left[\frac{m}{16}\right] + \ldots + \Psi_2\left[\frac{m}{[\sqrt{m}]^2}\right] = m.$$

Zur vollständigen Begründung dieser Gleichung greifen wir ein beliebiges Glied $(-1)^\rho\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\ldots}\right]$ des für $\Psi_2(m)$ aufgestellten Ausdruckes heraus, wo $a, b, c, \ldots$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten und ρ deren Anzahl bezeichnet. In dem Ausdrucke für $\Psi_2\left[\frac{m}{a^2}\right]$ wird die Zahl $\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\ldots}\right]$ mit dem Vorzeichen $(-1)^{\rho-1}$ behaftet sein, desgleichen in dem Ausdrucke $\Psi_2\left[\frac{m}{b^2}\right]$ u. s. w. In der Gleichung für $\Psi_2\left[\frac{m}{a^2b^2}\right]$ wird das Glied

$$(-1)^\rho\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\ldots}\right]$$

vorkommen, ebenso in der Gleichung für $\Psi_2\left[\frac{m}{a^2c^2}\right]$ u. s. w., kurz, bei Addition der obigen Gleichungen wird die Zahl $\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\ldots}\right]$ in der Verbindung

$$(-1)^\rho\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\ldots}\right]\left(1 - \rho + \frac{\rho(\rho-1)}{1\,.\,2} \mp \ldots + (-1)^\rho\right)$$

erscheinen, also vollständig wegfallen. In gleicher Weise kann man zeigen, dass jedes Glied $\left[\frac{m}{a^{2\lambda}b^{2\mu}c^{2\nu}}\right]$ ebenso oft mit dem positiven als mit dem negativen Vorzeichen erscheinen, also sich gleichfalls wegheben muss.

Die Gleichung (4) lässt sich noch auf einem andern Wege ableiten, und dann umgekehrt aus (4) die Gleichung (3), wir wollen jedoch diese Ableitung für die Function $\Psi_3(m)$ machen, welche die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m bezeichnet, die durch keine dritte Potenz teilbar sind.

Die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, m$ mögen in folgender Weise geordnet werden. In die erste Reihe schreiben wir diejenigen Zahlen, welche durch keine dritte Potenz teilbar sind; die Anzahl dieser Zahlen ist $\Psi_3(m)$. In

die zweite Reihe schreiben wir diejenigen Zahlen, welche durch 2^3, aber nicht durch die dritte Potenz einer die Zahl 2 übertreffenden Zahl teilbar sind; ihre Anzahl ist $\Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right]$ u. s. w. So entsteht das Schema

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, ...
8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.9, 8.10, 8.11, ...
27.1, 27.2, 27.3, 27.4, 27.5, 27.6, 27.7, 27.9, ...

Es leuchtet ein, dass man auf diese Weise alle Zahlen von 1 bis m erhält; denn wenn eine Zahl μ gegeben ist, so gibt es immer eine dritte Potenz, welche die höchste in μ aufgehende dritte Potenz ist. Andererseits ist es klar, dass keine einzige Zahl in dem vorstehenden Schema zweimal vorkommen kann; denn es ist unmöglich, dass es zwei verschiedene dritte Potenzen gibt, welche die höchsten in eine und dieselbe Zahl μ aufgehenden dritten Potenzen sind. Nun ist die Anzahl der Glieder der ersten Horizontalreihe gleich $\Psi_3(m)$, die Anzahl der Glieder der zweiten Horizontalreihe gleich $\Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right]$, u. s. w., die Anzahl aller Glieder ist m; es entsteht also die Gleichung

$$(5)\qquad \Psi_3(m) + \Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{3^3}\right] + \cdots + \Psi_3\left[\frac{m}{[\sqrt[3]{m}]^3}\right] = m.$$

Stellt man diese Gleichung für die Zahlen $m, \left[\frac{m}{2^3}\right], \left[\frac{m}{3^3}\right], \left[\frac{m}{5^3}\right], \left[\frac{m}{6^3}\right], \ldots$ auf, multipliziert in geeigneter Weise mit der positiven oder negativen Einheit und addiert, so ergibt sich eine Darstellung der Function $\Psi_3(m)$

$$\begin{array}{l}
\Psi_3(m) + \Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{3^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{4^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{5^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] + \cdots = m \\
\qquad - \Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right] - \Psi_3\left[\frac{m}{4^3}\right] - \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] - \cdots\cdots = -\left[\frac{m}{2^3}\right] \\
\qquad - \Psi_3\left[\frac{m}{3^3}\right] - \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] - \cdots\cdots = -\left[\frac{m}{3^3}\right] \\
\qquad - \Psi_3\left[\frac{m}{5^3}\right] - \cdots\cdots = -\left[\frac{m}{5^3}\right] \\
\qquad + \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] + \cdots\cdots = \left[\frac{m}{6^3}\right] \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$(6) \qquad \Psi_3(m) = m - \left[\frac{m}{2^3}\right] - \left[\frac{m}{3^3}\right] - \left[\frac{m}{5^3}\right] + \left[\frac{m}{6^3}\right] \mp \cdots$$ [1]

Die zur Begründung der Gleichungen (5) und (6) angewandten Schlüsse sind derart dass sie sich sofort verallgemeinern lassen. Bezeichnet demnach $\Psi_n(m)$ die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, welche durch keine von der Einheit verschiedene n^{te} Potenz teilbar sind, so gelten die Gleichungen

$$(7) \qquad \Psi_n(m) + \Psi_n\left[\frac{m}{2^n}\right] + \Psi_n\left[\frac{m}{3^n}\right] + \Psi_n\left[\frac{m}{4^n}\right] + \cdots = m,$$

$$(8) \qquad \Psi_n(m) = m - \left[\frac{m}{2^n}\right] - \left[\frac{m}{3^n}\right] - \left[\frac{m}{5^n}\right] + \left[\frac{m}{6^n}\right] \pm \cdots.$$

Natürlich lässt sich die letzte Gleichung auch aus (2) ableiten.

Vielleicht verdient der Umstand erwähnt zu werden, dass kein einziges Moment des obigen Beweisverfahrens die Annahme $n = 1$ unmöglich macht. Bedeutet $\Psi_1(m)$ die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m, welche durch keine von der Einheit verschiedene erste Potenz, d. h. durch keine von der Einheit verschiedene ganze Zahl aufgehen, so ist offenbar $\Psi_1(m) = 1$, $\Psi_1\left[\frac{m}{2}\right] = 1, \ldots,$ und die Gleichung (7) geht für $n = 1$ in $m = m$ über; aus der Gleichung (8) hingegen fliesst der Satz

$$(9) \qquad m - \left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{m}{3}\right] - \left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{m}{6}\right] - \left[\frac{m}{7}\right] + \left[\frac{m}{10}\right] + \cdots = 1.$$

Diese merkwürdige Gleichung kann man auch auf folgende Art beweisen. Man denke sich die Zahl m in m Einheiten zerlegt und dieselben mit fortlaufenden Zeigern versehen, so dass die letzte Einheit den Zeiger m hat. Sodann entferne man diejenigen Einheiten, deren Zeiger gerade sind, dann diejenigen, deren Zeiger durch 3, durch 5, durch 7, ... teilbar sind. Darauf füge man diejenigen Einheiten, deren Zeiger durch $6 = 2 . 3$,

[1] Die Gleichungen (1), (3), (5) und (6), sowie deren Beweise sind einer Vorlesung des Herrn Professor LIPSCHITZ entnommen.

durch 10, durch 14, durch 15, ... teilbar sind, wieder hinzu. Hierauf streiche man wieder diejenigen Einheiten, deren Zeiger durch $30 = 2.3.5$ teilbar sind, u. s. w., u. s. w. Es folgt dann aus einem schon mehrfach benutzten Satze, dass nur die erste Einheit übrig geblieben ist, und dass mithin Gleichung (9) zu Recht besteht. Der Kern dieses zweiten Beweises ist, wie man sieht, von dem des ersten Beweises nicht verschieden.

Die Gleichung (3) lässt sich zu einem Beweise des Satzes verwerten, dass die Anzahl der Primzahlen jede Grenze übersteigt. Aus (3) folgt, wie man leicht sieht, die Ungleichheit

$$\Psi_2(m) > m - \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{5^2}\right] - \left[\frac{m}{7^2}\right] - \dots,$$

oder bei Anwendung des Summenzeichens

$$\Psi_2(m) > m - \sum \left[\frac{m}{p^2}\right],$$

wo p die Reihe der nicht über m gelegenen Primzahlen durchläuft.

Nun ist

$$\sum \left[\frac{m}{p^2}\right] < m \sum \frac{1}{p^2} < m \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{1}{s^2},$$

also

$$\Psi_2(m) > m\left(1 - \sum_2^\infty \frac{1}{s^2}\right),$$

oder da

$$\sum_1^\infty \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ist,

$$\Psi_2(m) > m\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right).$$

Lässt man jetzt m über jedes Mass hinaus wachsen, so nimmt auch $\Psi_2(m)$ einen beliebig grossen Wert an, da der Faktor $2 - \frac{\pi^2}{6}$ einen positiven endlichen Wert hat. $\Psi_2(m)$ ist aber die Anzahl aller diejenigen

Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, welche entweder selbst Primzahlen oder aus lauter verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind. Diese Anzahl wächst also mit wachsendem m über jedes Mass hinaus. Hieraus folgt, dass auch die Anzahl der Primzahlen jedes Mass übersteigt; denn aus einer endlichen Anzahl von Elementen lassen sich nicht beliebig viele Combinationen ohne Wiederholung bilden.

BEITRÄGE ZUR AUSDEHNUNG DER FUCHS'SCHEN THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUF EIN SYSTEM LINEARER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

I. HORN

in FREIBURG i. B.

In einer im zwölften Bande dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung *über ein System linearer partieller Differentialgleichungen* beschäftigte ich mich mit der functionentheoretischen Untersuchung der Integrale eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \end{aligned}$$

dessen Coefficienten a, b, c rationale Functionen von x, y von solcher Beschaffenheit sind, dass die drei Differentialgleichungen (1) drei linear unabhängige Integrale gemein haben.[1] Es stellte sich damals schon heraus, dass die Integrale eines solchen Differentialgleichungensystems ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die von Herrn FUCHS (Crelles Journal, Bd. 66, 68 ff.) untersuchten Integrale einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung; wenn sich auch meine früheren Entwicklungen nicht über die Anfänge hinaus erstreckten, so ist daraus doch so viel

[1] Die hierzu erforderlichen Bedingungen sind künftig immer als erfüllt vorausgesetzt, auch wo es nicht besonders erwähnt wird.

zu ersehen, dass man die functionentheoretische Integration der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit einer endlichen Anzahl linear unabhängiger Integrale, sowie auch der damit im Zusammenhang stehenden Systeme totaler linearer Differentialgleichungen von der Form

$$(2)\quad \begin{aligned} dz_1 &= (a_{11}z_1 + \dots + a_{1m}z_m)dx + (b_{11}z_1 + \dots + b_{1m}z_m)dy, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dz_m &= (a_{m1}z_1 + \dots + a_{mm}z_m)dx + (b_{m1}z_1 + \dots + b_{mm}z_m)dy \end{aligned}$$

mit Aussicht auf Erfolg unternehmen kann.

In meiner Habilitationsschrift[1] habe ich die Acta mathematica, Bd. 12, begonnenen Untersuchungen weiter geführt; ich will hier einige Entwicklungen, welche als Ergänzung der früheren in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung dienen können, auszugsweise mittheilen, während ich hinsichtlich der genaueren Ausführung, sowie hinsichtlich anderer Fragen, auf die erwähnte Schrift verweise.

Im dritten Abschnitt der früheren Arbeit habe ich das Differentialgleichungensystem

$$(3)\quad \begin{aligned} \varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + \varphi A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi A_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= B_0 z + \varphi B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi B_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + \varphi C_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi C_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

behandelt, dessen Coefficienten A, B, C in der Umgebung der Stelle (a, b) des singulären Gebildes $\varphi = 0$ — $\varphi(x, y)$ ist eine irreductible ganze Function — in Potenzreihen entwickelbar sind; dieses System besitzt die Eigenschaft, dass sich seine sämmtlichen Integrale an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ regulär verhalten, es ist aber nicht das allgemeinste System, welchem diese Eigenschaft zukommt. Wenn wir der Kürze halber ein solches Differentialgleichungensystem regulär an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ nennen, so bietet sich die Aufgabe dar, *das allgemeinste reguläre System* (1) *aufzusuchen.* Man kann demselben jedenfalls die Form

[1] *Über Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen.* Habilitationsschrift der Universität Freiburg i. B. Berlin, Mayer & Müller, 1890.

$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A_0 z + A_1\frac{\partial z}{\partial x} + A_2\frac{\partial z}{\partial y},$$

(4) $$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = B_0 z + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + B_2\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C_0 z + C_1\frac{\partial z}{\partial x} + C_2\frac{\partial z}{\partial y}$$

geben, worin die Coefficienten A, B, C Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sind, welche nicht sämmtlich durch φ theilbar sind, während h eine ganze positive Zahl darstellt. Die Grössen

$$z_0 = \frac{z}{\varphi}, \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

genügen einem System totaler Differentialgleichungen

$$\varphi dz_0 = (A_{00}z_0 + A_{01}z_1 + A_{02}z_2)dx + (B_{00}z_0 + B_{01}z_1 + B_{02}z_2)dy,$$

(5) $$\varphi^{h+1}dz_1 = (A_{10}z_0 + A_{11}z_1 + A_{12}z_2)dx + (B_{10}z_0 + B_{11}z_1 + B_{12}z_2)dy,$$

$$\varphi^{h+1}dz_2 = (A_{20}z_0 + A_{21}z_1 + A_{22}z_2)dx + (B_{20}z_0 + B_{21}z_1 + B_{22}z_2)dy,$$

dessen Coefficienten die Werthe

(6) $$\begin{array}{lll} -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ 1,\ 0, & \qquad & -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ 0,\ 1, \\ \varphi A_0,\ A_1,\ A_2, & & \varphi B_0,\ B_1,\ B_2, \\ \varphi B_0,\ B_1,\ B_2, & & \varphi C_0,\ C_1,\ C_2 \end{array}$$

haben und folglich Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sind. Das Differentialgleichungensystem (5) besitzt unter Voraussetzung der Regularität ein Fundamentalsystem

$$\begin{array}{lll} z_0^0 = \varphi^{p^0}\zeta_0^0, & z_1^0 = \varphi^{p^0}\zeta_1^0, & z_2^0 = \varphi^{p^0}\zeta_2^0, \\ z_0' = \varphi^{p'}\zeta_0', & z_1' = \varphi^{p'}\zeta_1', & z_2' = \varphi^{p'}\zeta_2', \\ z_0'' = \varphi^{p''}\zeta_0'', & z_1'' = \varphi^{p''}\zeta_1'', & z_2'' = \varphi^{p''}\zeta_2'' \end{array}$$

von solcher Beschaffenheit, dass bei geeigneter Bestimmung der Exponenten p^0, p', p'' weder sämmtliche ζ einer Reihe noch sämmtliche ζ einer Colonne durch φ theilbar sind. Setzt man in (5)

$$z_0 = \varphi^p\zeta_0, \qquad z_1 = \varphi^p\zeta_1, \qquad z_2 = \varphi^p\zeta_2,$$

so folgt aus den Differentialgleichungen für ζ nach einigen a. a. O. ausgeführten Betrachtungen, dass alle aus den Grössen

$$(7)\qquad \begin{matrix} A_{10}\,, & A_{11}\,, & A_{12}, \\ A_{20}\,, & A_{21}\,, & A_{22}, \\ B_{10}\,, & B_{11}\,, & B_{12}, \\ B_{20}\,, & B_{21}\,, & B_{22} \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten zweiten Grades durch φ^h theilbar sind. Man kann daher drei ganze Functionen $\varkappa, \lambda, \mu$ so bestimmen, dass die durch die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{matrix} \mu A_{11} - \lambda A_{12} = \varphi^h A_1, & \varkappa A_{12} - \mu A_{10} = \varphi^h A_1', & \lambda A_{10} - \varkappa A_{11} = \varphi^h A_1'', \\ \mu A_{21} - \lambda A_{22} = \varphi^h A_2, & \varkappa A_{22} - \mu A_{20} = \varphi^h A_2', & \lambda A_{20} - \varkappa A_{21} = \varphi^h A_2'', \\ \mu B_{11} - \lambda B_{12} = \varphi^h B_1, & \varkappa B_{12} - \mu B_{10} = \varphi^h B_1', & \lambda B_{10} - \varkappa B_{11} = \varphi^h B_1'', \\ \mu B_{21} - \lambda B_{22} = \varphi^h B_2, & \varkappa B_{22} - \mu B_{20} = \varphi^h B_2', & \lambda B_{20} - \varkappa B_{21} = \varphi^h B_2'' \end{matrix}$$

neu definirten Grössen in Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ entwickelbar sind. Für

$$v_0 = z_0, \qquad v_1 = z_1, \qquad v_2 = \frac{\varkappa z_0 + \lambda z_1 + \mu z_2}{\varphi^h}$$

erhält man ein Differentialgleichungensystem

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varphi dv_0 &= (P_{00}v_0 + P_{01}v_1 + P_{02}v_2)dx + (Q_{00}v_0 + Q_{01}v_1 + Q_{02}v_2)dy, \\ \varphi dv_1 &= (P_{10}v_0 + P_{11}v_1 + P_{12}v_2)dx + (Q_{10}v_0 + Q_{11}v_1 + Q_{12}v_2)dy, \\ \varphi dv_2 &= (P_{20}v_0 + P_{21}v_1 + P_{22}v_2)dx + (Q_{20}v_0 + Q_{21}v_1 + Q_{22}v_2)dy, \end{aligned}$$

dessen Coefficienten P, Q einfache Verbindungen der A, B sind, und zwar ergeben sich[1] die Coefficienten der beiden ersten Zeilen als Potenzreihen von $x - a$, $y - b$, während man für P_{20}, P_{21}, P_{22}; Q_{20}, Q_{21}, Q_{22} Ausdrücke von der Form $\frac{\mathfrak{P}(x - a, y - b)}{\varphi^h}$ erhält. Eine weitere Betrachtung,

---

[1] Da λ, μ nicht beide durch φ theilbar sein können, so setzen wir μ als nicht durch φ theilbar voraus.

die wir wieder unterdrücken wollen, ergiebt, dass unter den gemachten Voraussetzungen auch sämmtliche Coefficienten der letzten Differentialgleichung (9) Potenzreihen sein müssen. Mit Rücksicht auf die Ausdrücke für diese Coefficienten findet man, dass auch die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\lambda A_{10} + \mu A_{20} = \varphi^h L_0, \qquad \lambda B_{10} + \mu B_{20} = \varphi^h M_0, \\ (10) \qquad &\lambda A_{11} + \mu A_{21} = \varphi^h L_1, \qquad \lambda B_{11} + \mu B_{21} = \varphi^h M_1, \\ &\lambda A_{12} + \mu A_{22} = \varphi^h L_2, \qquad \lambda B_{12} + \mu B_{22} = \varphi^h M_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda A_1 + \mu A_2 = \mu L_1 - \lambda L_2 = \varphi^h L - \varkappa(\mu A_{01} - \lambda A_{02}) + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right), \\ &\lambda A_1' + \mu A_2' = \varkappa L_2 - \mu L_0 = \varphi^h L' - \varkappa(\varkappa A_{02} - \mu A_{00}) + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial x}\right), \\ &\lambda A_1'' + \mu A_2'' = \lambda L_0 - \varkappa L_1 = \varphi^h L'' - \varkappa(\lambda A_{00} - \varkappa A_{01}) + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right), \\ (11) \qquad & \\ &\lambda B_1 + \mu B_2 = \mu M_1 - \lambda M_2 = \varphi^h M - \varkappa(\mu B_{01} - \lambda B_{02}) + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right), \\ &\lambda B_1' + \mu B_2' = \varkappa M_2 - \mu M_0 = \varphi^h M' - \varkappa(\varkappa B_{02} - \mu B_{00}) + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial y} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial y}\right), \\ &\lambda B_1'' + \mu B_2'' = \lambda M_0 - \varkappa M_1 = \varphi^h M'' - \varkappa(\lambda B_{00} - \varkappa B_{01}) + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

definirten Grössen $L_0, M_0, \ldots; L, M, \ldots$ in Potenzreihen von $x - a, y - b$ entwickelbar sind. Sind nun aber die durch (8), (10), (11) definirten Functionen in Potenzreihen entwickelbar, so sind es auch die Coefficienten sämmtlicher Gleichungen (9), das System (9) ist an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ regulär, und folglich auch das System (5).

Wollen wir nun aus den für die Regularität des Systems (5) gefundenen Bedingungen die Regularitätsbedingungen des Systems (4) ableiten, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

I. die Grössen

$$(12) \qquad \begin{aligned} &A_1, \; A_2, \\ &B_1, \; B_2, \\ &C_1, \; C_2, \end{aligned}$$

sind nicht sämmtlich durch φ theilbar;

II. alle Potenzreihen (12) sind durch φ theilbar, während A_0, B_0, C_0 nicht gleichzeitig durch φ theilbar sind.

Im Falle I. setzen wir in die Regularitätsbedingungen (8), (10), (11) die Ausdrücke (6) ein und ändern die Bezeichnung etwas ab; namentlich ersetzen wir x durch $x\varphi$. Im Falle II. sind alle Coefficienten der beiden letzten Differentialgleichungen (5) durch φ theilbar, so dass der Exponent h um 1 erniedrigt werden kann; ersetzen wir $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ bezw. durch $\varphi A_1, \varphi A_2; \varphi B_1, \varphi B_2; \varphi C_1, \varphi C_2$, so geht in diesem Falle das System (5) über in

$$\varphi dz_0 = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}z_0 + z_1\right)dx + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}z_0 + z_2\right)dy,$$

$$\varphi^h dz_1 = (A_0z_0 + A_1z_1 + A_2z_2)dx + (B_0z_0 + B_1z_1 + B_2z_2)dy,$$

$$\varphi^h dz_2 = (B_0z_0 + B_1z_1 + B_2z_2)dx + (C_0z_0 + C_1z_1 + C_2z_2)dy,$$

wofür wir in der oben angegebenen Weise die Regularitätsbedingungen bilden.

Jedes reguläre System (1) *hat eine der beiden folgenden Formen:*

I.

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + A_1\frac{\partial z}{\partial x} + A_2\frac{\partial z}{\partial y},\\ \varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= B_0 z + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + B_2\frac{\partial z}{\partial y},\\ \varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{dy^2} &= C_0 z + C_1\frac{\partial z}{\partial x} + C_2\frac{\partial z}{\partial y}; \end{aligned}$$

die Coefficienten A, B, C sind in der Umgebung der Stellen (a, b) des singulären Gebildes $\varphi = 0$ Potenzreihen; keine der Grössen (12) *ist durch φ theilbar; es lassen sich ganze Functionen x, λ, μ so bestimmen, dass alle durch die Gleichungen*

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\mu A_1 - \lambda A_2 = \varphi^h A, && x A_2 - \mu A_0 = \varphi^{h-1}A', && \lambda A_0 - x A_1 = \varphi^{h-1}A'',\\ &\mu B_1 - \lambda B_2 = \varphi^h B, && x B_2 - \mu B_0 = \varphi^{h-1}B', && \lambda B_0 - x B_1 = \varphi^{h-1}B'',\\ &\mu C_1 - \lambda C_2 = \varphi^h C, && x C_2 - \mu C_0 = \varphi^{h-1}C', && \lambda C_0 - x C_1 = \varphi^{h-1}C'', \end{aligned}$$

$$\lambda A_0 + \mu B_0 = \varphi^h L_0, \qquad \lambda B_0 + \mu C_0 = \varphi^h M_0,$$
(15)
$$\lambda A_1 + \mu B_1 = \varphi^h L_1, \qquad \lambda B_1 + \mu C_1 = \varphi^h M_1,$$
$$\lambda A_2 + \mu B_2 = \varphi^h L_2, \qquad \lambda B_2 + \mu C_2 = \varphi^h M_2,$$

$$\lambda A + \mu B = \mu L_1 - \lambda L_2 = \varphi^h L \quad + \varphi\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial x} - x\mu\right),$$
$$\frac{\lambda A' + \mu B'}{\varphi} = xL_2 - \mu L_0 = \varphi^{h-1}L' + \varphi\left(\mu\frac{\partial x}{\partial x} - x\frac{\partial\mu}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\lambda A'' + \mu B''}{\varphi} = \lambda L_0 - xL_1 = \varphi^{h-1}L'' + \varphi\left(x\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \lambda\frac{\partial x}{\partial x} + x^2\right),$$
(16)
$$\lambda B + \mu C = \mu M_1 - \lambda M_2 = \varphi^h M \quad + \varphi\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial y} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial y} + x\lambda\right),$$
$$\frac{\lambda B' + \mu C'}{\varphi} = xM_2 - \mu M_0 = \varphi^{h-1}M' + \varphi\left(\mu\frac{\partial x}{\partial y} - x\frac{\partial\mu}{\partial y} - x^2\right),$$
$$\frac{\lambda B'' + \mu C''}{\varphi} = \lambda M_0 - xM_1 = \varphi^{h-1}M'' + \varphi\left(x\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \lambda\frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

definirten Functionen Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ *sind;*

II.
$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A_0 z + \varphi A_1\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi A_2\frac{\partial z}{\partial y},$$
(17)
$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = B_0 z + \varphi B_1\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi B_2\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C_0 z + \varphi C_1\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi C_2\frac{\partial z}{\partial y};$$

die Coefficienten A, B, C *sind Potenzreihen von* $x - a$, $y - b$; A_0, B_0, C_0 *sind nicht sämmtlich durch* φ *theilbar; es existiren drei ganze Functionen* x, λ, μ *von solcher Beschaffenheit, dass sämmtliche durch die Gleichungen*

$$\mu A_1 - \lambda A_2 = \varphi^{h-1}A, \qquad xA_2 - \mu A_0 = \varphi^{h-1}A', \qquad \lambda A_0 - xA_1 = \varphi^{h-1}A'',$$
(18)
$$\mu B_1 - \lambda B_2 = \varphi^{h-1}B, \qquad xB_2 - \mu B_0 = \varphi^{h-1}B', \qquad \lambda B_0 - xB_1 = \varphi^{h-1}B'',$$
$$\mu C_1 - \lambda C_2 = \varphi^{h-1}C, \qquad xC_2 - \mu C_0 = \varphi^{h-1}C', \qquad \lambda C_0 - xC_1 = \varphi^{h-1}C'',$$

$$
(19) \qquad \begin{aligned}
\lambda A_0 + \mu B_0 &= \varphi^{h-1} L_0, & \lambda B_0 + \mu C_0 &= \varphi^{h-1} M_0,\\
\lambda A_1 + \mu B_1 &= \varphi^{h-1} L_1, & \lambda B_1 + \mu C_1 &= \varphi^{h-1} M_1,\\
\lambda A_2 + \mu B_2 &= \varphi^{h-1} L_2, & \lambda B_2 + \mu C_2 &= \varphi^{h-1} M_2,
\end{aligned}
$$

$$
(20) \qquad \begin{aligned}
\lambda A + \mu B &= \mu L_1 - \lambda L_2 = \varphi^{h-1} L + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) - \varkappa\mu,\\
\lambda A' + \mu B' &= \varkappa L_2 - \mu L_0 = \varphi^{h-1} L' + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \varkappa\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x},\\
\lambda A'' + \mu B'' &= \lambda L_0 - \varkappa L_1 = \varphi^{h-1} L'' + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right) + \varkappa^2 + \varkappa\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x},\\
\lambda B + \mu C &= \mu M_1 - \lambda M_2 = \varphi^{h-1} M + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) + \varkappa\lambda,\\
\lambda B' + \mu C' &= \varkappa M_2 - \mu M_0 = \varphi^{h-1} M' + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial y} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - \varkappa^2 - \varkappa\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y},\\
\lambda B'' + \mu C'' &= \lambda M_0 - \varkappa M_1 = \varphi^{h-1} M'' + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial y}\right) + \varkappa\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}
\end{aligned}
$$

definirten Functionen in Potenzreihen entwickelbar sind.

Die Systeme I. *und* II. *sind unter den angegebenen Bedingungen wirklich regulär.*

Wir wollen die Fälle I. und II. als Systeme erster und zweiter Gattung bezeichnen. Wir sehen nun auch, dass das früher behandelte System (3) das einfachste System II. Gattung ist, welches dem Werte $h = 1$ entspricht; die Bedingungen (18), (19), (20) sind in diesem besonderen Falle von selbst erfüllt. Das zu dem Werthe $h = 1$ gehörige System I. Gattung hat die Form

$$
(21) \qquad \begin{aligned}
\varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + A_2 \frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= B_0 z + B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + B_2 \frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + C_1 \frac{\partial z}{\partial x} + C_2 \frac{\partial z}{\partial y};
\end{aligned}
$$

sowohl die Coefficienten A, B, C als auch sämmtliche in den Gleichungen[1]

$$A_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi A,$$

$$B_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi B,$$

$$C_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi C,$$

$$(22)\qquad \begin{aligned} A_0 \frac{\partial\varphi}{\partial y} - B_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \varphi L_0, & B_0 \frac{\partial\varphi}{\partial y} - C_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \varphi M_0, \\ A_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y} - B_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \varphi L_1, & B_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y} - C_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \varphi M_1, \\ A_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} - B_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \varphi L_2, & B_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} - C_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \varphi M_2, \end{aligned}$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial y} - B\frac{\partial\varphi}{\partial x} = L_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + L_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi L,$$

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial y} - C\frac{\partial\varphi}{\partial x} = M_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + M_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi M$$

enthaltenen Grössen sind Potenzreihen.

Will man *die Form der Integrale der Systeme* I. *und* II. *genauer untersuchen,* so beachtet man, dass dieselben in Systeme von der Form (9), welche Potenzreihen zu Coefficienten haben, übergeführt werden können. Zu den im zweiten Abschnitt der früheren Arbeit über totale Differentialgleichungensysteme enthaltenen Entwicklungen ist eine wichtige Ergänzung hinzuzufügen. Ist p der Exponent einer regulären Lösung

$$z_0 = \varphi^p \zeta_0, \qquad z_1 = \varphi^p \zeta_1, \qquad z_2 = \varphi^p \zeta_2$$

---

[1] Diese Gleichungen folgen aus (14), (15), (16) mit Rücksicht auf die für Systeme I. Gattung stets geltende Beziehung

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y} \equiv 0, \ \text{mod}\ \varphi^h.$$

des Systems der Differentialgleichungen

$$(23)\quad \begin{aligned} \varphi dz_0 &= (A_{00}z_0 + A_{01}z_1 + A_{02}z_2)dx + (B_{00}z_0 + B_{01}z_1 + B_{02}z_2)dy, \\ \varphi dz_1 &= (A_{10}z_0 + A_{11}z_1 + A_{12}z_2)dx + (B_{10}z_0 + B_{11}z_1 + B_{12}z_2)dy, \\ \varphi dz_2 &= (A_{20}z_0 + A_{21}z_1 + A_{22}z_2)dx + (B_{20}z_0 + B_{21}z_1 + B_{22}z_2)dy, \end{aligned}$$

deren Coefficienten Potenzreihen von $x-a$, $y-b$ sind, so sieht man aus den Differentialgleichungen für ζ, dass alle aus je drei der sechs Zeilen

$$(24)\quad \begin{matrix} A_{00}-p\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{01}, & A_{02}, \\ A_{10}, & A_{11}-p\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{12}, \\ A_{20}, & A_{21}, & A_{22}-p\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ B_{00}-p\frac{\partial\varphi}{\partial y}, & B_{01}, & B_{02}, \\ B_{10}, & B_{11}-p\frac{\partial\varphi}{\partial y}, & B_{12}, \\ B_{20}, & B_{21}, & B_{22}-p\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten durch φ theilbar sein müssen. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sämmtliche aus (24) gebildeten Congruenzen drei Wurzeln p (verschiedene oder zusammenfallende), zwei Wurzeln p oder nur eine Wurzel p gemein haben, oder, was dasselbe ist, je nachdem alle Elemente oder alle Determinanten zweiten Grades oder nur die Determinante dritten Grades des Systems

$$(25)\quad \begin{matrix} A_{00}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{00}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{01}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{01}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{02}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{02}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ A_{10}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{10}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ A_{20}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{20}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-B_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \end{matrix}$$

durch φ theilbar ist. Hiernach unterscheiden wir *Systeme* (23) *von der*

ersten, zweiten und dritten Art. Die gewöhnliche Form eines Fundamentalsystems ist in den drei Fällen bezw.

$$(26)\qquad \begin{array}{llll} \text{a)}\ z_i^0 = \varphi^{p^0}\zeta_i^0, & \text{b)}\ z_i^0 = \varphi^{p_1}\zeta_i^0, & \text{c)}\ z_i^0 = \varphi^{p_0}\zeta_i^0, & \\ \phantom{\text{a)}}\ z_i' = \varphi^{p'}\zeta_i', & \phantom{\text{b)}}\ z_i' = \varphi^{p_1}\zeta_i', & \phantom{\text{c)}}\ z_i' = \varphi^{p_0}\zeta_i', & (i=0,1,2) \\ \phantom{\text{a)}}\ z_i'' = \varphi^{p''}\zeta_i'', & \phantom{\text{b)}}\ z_i'' = \varphi^{p_2}\zeta_i'', & \phantom{\text{c)}}\ z_i'' = \varphi^{p_0}\zeta_i'', & \end{array}$$

wobei $\zeta_i^0, \zeta_i', \zeta_i''$ Potenzreihen von $x - a, y - b$ sind.[1]

Um über die Form der Integrale der aufgestellten regulären partiellen Systeme Aufschluss zu erhalten, denken wir uns dieselben in der oben angegebenen Weise in totale Systeme (9) übergeführt; wir finden so, dass das System (9) von der ersten oder zweiten Art ist, wenn es aus einem partiellen System I. Gattung, von der zweiten oder dritten[2] Art, wenn es aus einem partiellen System II. Gattung für $h = 1$, und von der dritten Art, wenn es aus einem partiellen System II. Gattung für $h > 1$ hervorgeht. Aus der Beschaffenheit des totalen Systems (9) folgt aber die Form der Integrale des regulären partiellen Systems; die betreffenden Sätze kann man so aussprechen, dass das beim Beweise benutzte System (9) in ihrem Ausdruck nicht mehr vorkommt.

Es sind somit alle an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ regulären Systeme linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (1) aufgestellt, und man kennt die Form ihrer Integrale in der Umgebung solcher Stellen des singulären Gebildes $\varphi = 0$, durch welche nicht noch andere singuläre Gebilde gehen.[3]

Rehbach (Hessen), 15. November 1889.

---

[1] A. a. O. ist die Form der Integrale in allen Fällen untersucht. Unter anderm ergiebt sich, dass bei einem System der dritten Art nie Logarithmen in den Integralen auftreten, während bei der zweiten Art $\log \varphi$ höchstens in der ersten Potenz, bei der ersten Art möglicherweise auch in der zweiten Potenz vorkommen kann.

[2] In meiner Arbeit Acta mathematica, Bd. 12, muss nämlich der S. 156 unten beginnende Absatz unterdrückt werden.

[3] Im letzten Paragraphen meiner Habilitationsschrift finden sich noch einige Erörterungen über die Form der Integrale in der Umgebung der Schnittstellen zweier singulärer Gebilde.

SUR LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE POUR LES CORPS EN MOUVEMENT

PAR

H. HERTZ

À BONN.

(Traduit de l'allemand des Annales de Wiedemann.[1])

J'ai publié récemment[2] une exposition des phénomènes électromagnétiques dans les corps en repos. Elle coïncide dans le fond avec la théorie de MAXWELL, mais pour la forme, elle arrive à un ordre systématique meilleur. J'admettais dès le commencement ce principe sévèrement respecté: La force électrique et magnétique en chaque point correspond à un état particulier du milieu qui s'y trouve, les causes qui déterminent cet état et ses variations doivent être cherchées seulement dans le voisinage immédiat, à l'exclusion de toute action à distance. Je supposais de plus que l'état électrique et magnétique est déterminé en chaque point par une seule grandeur dirigée et j'ai montré que cette restriction n'exclut de notre étude que des phénomènes d'une importance secondaire. L'introduction du potentiel dans les équations fondamentales était évitée.

Reste à savoir si l'observation stricte des mêmes principes et de la même restriction permet d'étendre la théorie aux corps en mouvement. Observons d'abord qu'en parlant des corps en mouvement nous n'entendons ordinairement que le mouvement de la matière pondérable. Mais les mouvements simultanés de l'éther ne sauraient être sans influence, et sur cette influence nous n'avons aucune donnée. D'après cela il est bien entendu que sans l'introduction d'une hypothèse arbitraire sur le mouvement de l'éther, la question proposée ne peut pas être traitée

[1] t. 41, 1890.

[2] H. HERTZ, Wiedemann's Annalen, p. 577. 1890.

pour le moment. Il faut avouer de plus que les quelques indications que l'on a sur le mouvement de l'éther nous font présumer qu'à la question posée en toute rigueur on doive répondre par la négative. Il paraît résulter de ces indications que l'éther se meut dans l'intérieur de la matière pondérable, indépendamment de celle-ci; il est même presque impossible d'éviter cette hypothèse, en considération du fait qu'on ne peut enlever l'éther d'un espace clos. Si donc nous voulons adapter notre théorie aux idées les plus vraisemblables, nous devons considérer en chaque point de l'espace les états électromagnétiques de l'éther et de la matière comme indépendants. Les phénomènes électromagnétiques appartiennent alors à la classe de ceux qu'on ne peut pas traiter sans l'introduction de deux grandeurs dirigées pour chacun des états électrique et dynamique.

Il en est autrement si nous nous limitons au cercle des phénomènes électromagnétiques proprement dits et qui se prêtent aux observations exactes. Parmi les phénomènes ainsi restreints, il ne s'en trouve pas qui nous oblige à donner à l'éther un mouvement indépendant de celui du corps qui le renferme; cela résulte bien de la circonstance que cette classe de phénomènes ne fournit pas de donnée sur la grandeur du déplacement réciproque de l'éther et du corps. Ainsi les phénomènes électriques et magnétiques proprement dits peuvent se traiter avec cette notion qu'un tel déplacement n'existe pas, et que l'éther supposé dans la matière pondérable se meut avec celui-ci. Cette notion permet de ne considérer en chaque point de l'espace que les états d'un milieu unique, elle permet donc de répondre affirmativement à la question posée. Nous l'adoptons pour le présent mémoire. Si la théorie reconstruite sur ces principes ne possède pas l'avantage de donner la réponse exacte ou même une réponse déterminée à toute question, elle donne du moins pour chacune des réponses possibles, c'est à dire qui ne sont en contradiction, ni avec les phénomènes observés dans les corps en mouvement, ni avec les principes empruntés à la théorie des corps en repos.

Ainsi, d'après nos hypothèses, il y a lieu d'attribuer à chaque point de l'espace une vitesse déterminée unique. Ses composantes α, β, γ seront supposées finies et continues d'un point à un autre. Nous admettons aussi, il est vrai, des variations discontinues, mais nous traitons ce cas comme la limite d'une variation continue très rapide. En outre nous assujettissons toute discontinuité possible à la restriction que celle-ci ne

conduise pas à la formation d'un espace vide, et cette condition équivaut à dire que les 3 dérivées $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \frac{d\gamma}{dz}$ restent finies. Si en un point se trouve de la matière palpable, nous empruntons à celle-ci les valeurs des α, β, γ; dans le cas contraire, nous pouvons attribuer aux α, β, γ toute valeur arbitraire compatible avec les mouvements donnés à la limite de l'espace dénué de matière ponderable, et d'un égal ordre de grandeur. Nous pouvons par exemple mettre pour α, β, γ les valeurs qui se trouveraient dans l'éther si celui-ci se déplaçait comme un gaz arbitrairement choisi. Pour le reste, toutes les notations du travail mentionné plus haut conserveront ici la même signification. Nous désignons donc par L, M, N les composantes de la force magnétique, par X, Y, Z celles de la force électrique, par $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ celles de la polarisation magnétique, par $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ celles de la polarisation électrique, par u, v, w les composantes du courant électrique. Nous rappelons encore que les grandeurs $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, u, v, w$ sont des fonctions linéaires des composantes des forces, savoir:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mu_{11}L + \mu_{12}M + \mu_{13}N, \\ \mathfrak{M} &= \mu_{21}L + \mu_{22}M + \mu_{23}N, \\ \mathfrak{N} &= \mu_{31}L + \mu_{32}M + \mu_{33}N, \end{aligned} \qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z, \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon_{21}X + \varepsilon_{22}Y + \varepsilon_{23}Z, \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon_{31}X + \varepsilon_{32}Y + \varepsilon_{33}Z, \end{aligned}$$

$$\text{(c)}\quad \begin{aligned} u &= \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z'), \\ v &= \lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z'), \\ w &= \lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z'). \end{aligned}$$

Les constantes $\mu, \varepsilon, \lambda$ sont respectivement les constantes de magnétisation, les constantes diélectriques et les conductibilités; X', Y', Z' sont les composantes de la force électromotrice. En chaque point des corps, toutes ces grandeurs doivent être considérées comme des propriétés caractéristiques du milieu. L'énergie magnétique de l'unité de volume était égale à $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)$, l'énergie électrique à $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z)$; la somme de ces deux expressions formait l'énergie totale de l'unité de volume. Nous rappelons en outre que la suite des états électromagné-

tiques dans les corps fixes était déterminée par la condition que, sans cesse et en tous les points de l'espace infini, ils satisfassent aux équations:

$$(\mathrm{d})\quad A\frac{d\mathfrak{L}}{dt}=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},\qquad A\frac{d\mathfrak{M}}{dt}=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx},\qquad A\frac{d\mathfrak{N}}{dt}=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy},$$

$$(\mathrm{e})\quad A\frac{d\mathfrak{X}}{dt}=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi Au,\qquad A\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}-4\pi Av,\qquad A\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}-4\pi Aw.$$

Dans tout cela, nous nous contentions de voir dans la force électrique et la force magnétique un moyen pour marquer des états particuliers de la matière en repos. De même, dans le présent travail, ces grandeurs seront adoptées pour définir les mêmes états de la matière mobile. Ici comme dans mon premier mémoire, les polarisations électrique et magnétique ne seront regardées que comme un second moyen équivalent de définir ces états. De même les lignes de force qui, par leur densité et leurs direction, représentent les polarisations, n'auront aucune autre signification.

1. *Extension des équations fondamentales aux corps mobiles.*

D'après les équations (d), en chaque point d'un corps fixe, la variation de l'état magnétique avec le temps est exclusivement déterminée par la distribution de la force électrique dans le voisinage du point. Dans un corps mobile, à cette variation s'en ajoute à tout instant une deuxième; elle provient de la déformation que le mouvement fait éprouver au voisinage du point considéré. Nous admettons encore que l'influence du mouvement, considéré seul, est d'entraîner avec la matière les lignes de force magnétiques. Pour mieux préciser cette hypothèse principale, imaginons qu'à un instant donné l'état magnétique de la substance soit représenté par un système de lignes de force; dès lors, à tous les instants suivants, un système de lignes appliquées aux mêmes points matériels et considérées comme des lignes de forces, représenterait encore l'état magnétique, si l'influence seule du mouvement entrait en compte. L'énoncé correspondant s'applique aux variations que le mouvement fait éprouver à la polarisation électrique. Ces énoncés suffisent pour étendre aux corps mo-

biles la théorie développée pour les corps fixes; évidemment ils sont en concordance avec nos principes et on verra qu'ils comprennent les faits observés.

Pour mettre notre hypothèse en formule, considérons pendant le temps dt un élément de surface qui soit parallèle au plan yz à l'origine de l'élément de temps considéré, et entraîné dans le mouvement de la matière. Nous donnons aux lignes de force magnétiques une densité telle que, au commencement du temps dt, la surface considérée soit traversée par le nombre $\mathfrak{L}$ de celles-ci. Partout et toujours, on doit donc appeler $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ le nombre des lignes de force qui traversent une portion égale de surface parallèle aux plans yz, zx, xy. Le nombre des lignes de force qui traversent l'élément considéré change pour des causes diverses. Nous allons examiner séparément la part que fournit chacune d'elles. D'abord, si on imagine que l'élément de surface soit fixe, la variation est $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}dt$, $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$ désignant la vitesse de variation de $\mathfrak{L}$ en un point fixe par rapport à notre système de coordonnées. En second lieu l'élément de surface est emporté avec la vitesse α, β, γ vers un lieu où domine une autre valeur de $\mathfrak{L}$; de ce fait la variation monte à

$$\left(\alpha\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)dt.$$

En troisième lieu, l'élément tourne avec la vitesse $\frac{d\alpha}{dy}$ autour de l'axe z et avec la vitesse $\frac{d\alpha}{dz}$ autour de l'axe y; des lignes de force qui étaient primitivement parallèles à son plan viendront le traverser: la part due à cette cause est $-\left(\mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy} + \mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz}\right)dt$. Enfin l'aire de l'élément augmente avec la vitesse $\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}$ et par là le nombre considéré croît de $\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)dt$. Si les parts énumérées sont toutes égales à zéro, le nombre considéré ne peut pas varier; nous avons donc épuisé les causes de variation et comme toutes les parts sont très petites, leur somme répond à la variation totale. Mais nous pouvons partager celle-ci en parties qui ont une signification plus physique: la partie que produirait seul l'état présent des forces électriques dans le voisinage, et la partie due au mouvement seul. La première est, d'après les lois relatives aux conducteurs fixes, égale à

$\frac{1}{A}\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)dt$; la dernière est nulle d'après l'assertion apportée au début de ce paragraphe; la première seule représente donc bien la variation totale. Egalons les 2 expressions trouvées pour la variation totale, divisons par dt, multiplions par A, ajoutons et retranchons l'expression $\alpha\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\alpha\frac{d\mathfrak{N}}{dz}$; ordonnons, et opérons de même pour les autres composantes de la force magnétique et pour celles de la force électrique; nous obtenons le système suivant d'équations fondamentales pour les corps en mouvement:

$$
(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&A\left\{\frac{d\mathfrak{L}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L})+\alpha\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{M}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})-\frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})+\beta\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx},\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{N}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L})-\frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})+\gamma\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dx}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(1')\quad\left\{\begin{aligned}
&A\left\{\frac{d\mathfrak{X}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})+\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi Au,\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})-\frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})+\beta\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}-4\pi Av,\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})-\frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})+\gamma\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}-4\pi Aw.
\end{aligned}\right.
$$

Elles sont complétées par les relations linéaires qui lient aux forces les polarisations et les composantes du courant. Les coefficients de ces relations doivent être regardés comme des fonctions de l'état variable de la matière mobile et par conséquent comme des fonctions du temps.

Notre manière d'établir les équations (1), (1') n'exige pas que le système de coordonnées employé soit fixe dans l'espace absolu. Les équations ne changeront donc pas de forme si on remplace le système primitivement choisi par tout autre système mobile à volonté dans l'espace; α, β, γ désigneront les composantes de la vitesse relative par rapport au nouveau système de coordonnées; les constantes ε, μ, λ, X', Y', Z' qui dépendent de la direction seront aussi, à chaque instant, relatives à ce nouveau système. Pour un ensemble de corps qui se meut comme un corps rigide, on peut par suite donner aux équations (1) et (1') continuellement la forme des équations des corps fixes: il suffit d'employer un système de coordonnées invariablement lié à celui des corps. Il résulte de là que le mouvement absolu d'un système de forme invariable n'a aucune influence sur son état électrodynamique intérieur, pourvu que tous les corps véritablement considérés, même l'éther, participent au mouvement. D'après cela, si une portion d'un système mobile se meut comme un corps rigide, les choses s'y passent comme dans un corps fixe. Si donc le mouvement considéré a toutefois une influence sur cette partie, cette influence ne peut provenir que des parties où se trouvent des déformations, de là elle se propage ensuite vers la partie qui se meut comme un corps rigide. Si par exemple une masse métallique solide est déplacée subitement dans un champ magnétique, immédiatement ou plutôt en même temps la surface et le voisinage seulement en sont influencés et des forces électriques y sont engendrées; ce n'est que secondairement, c'est à dire quelque peu après, que celles-ci se propagent dans l'intérieur de la masse et y produisent les courants.

Les équations établies sont, par le but et la forme, analogues à celles qu'a données VON HELMHOLTZ au tome 78 du Journal de Borchardt pour représenter le jeu des forces électriques et magnétiques dans les corps mobiles.[1] Les dénomiations lui sont en partie empruntées. Cependant nos équations diffèrent des siennes, non seulement par la forme,

[1] v. HELMHOLTZ, Gesammelte Abhandlungen, I, p. 745.

mais aussi par le fonds relativement à certains termes qui ne peuvent pas être examinés par l'expérience. MAXWELL lui-même me paraît avoir fait abstraction dans son système d'une série importante de phénomènes dans les corps en mouvement. Dans les nombreuses considérations qu'il consacre à ces phénomènes, il se borne aux cas ou se contente des rapprochements dont l'objet est de montrer que la distinction entre la théorie des forces à distance et celle de l'action de proche en proche n'est pas nécessaire.

2. *Signification physique des différents termes.*

Le système des équations (1) et (1') nous donne la valeur future des polarisations en chaque point fixe de l'espace ou, si nous préférons, en chaque élément de la matière mobile, comme la conséquence déterminée des états électromagnétiques et du mouvement actuel dans le voisinage du point considéré. Telle est, d'après notre manière de voir, sa signification physique. D'ordinaire, on interprète tout autrement ces équations. On voit, à gauche, la cause dans les vitesses de changement des polarisations: à droite, la conséquence dans les forces induites. Cette opinion est née de cette circonstance que les polarisations et leurs changements nous sont connus plus tôt et plus clairement que les forces coexistantes; que par conséquent les membres gauches des équations sont les premiers au point de vue de notre connaissance. D'une façon générale, elle conduit à cette difficulté que les forces ne sont pas déterminées sans ambiguité par les vitesses de changement des polarisations, mais contiennent des termes indépendants de ces changements. La théorie usitée oppose ces parties comme des forces électrostatiques ou magnétiques aux forces électromagnetiques qui selon elle sont seules déterminées par nos équations. Quoique nous n'approuvions pas une telle séparation, il n'est cependant passans intérêt de montrer comment les différents termes de nos équations comprennent les forces partielles introduites par la théorie usitée. Dans ce but décomposons les forces sous la forme $X = X_1 + X_2$, $L = L_1 + L_2$, etc. et posons

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
X_1 &= A(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{N}), & L_1 &= A(\beta\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{Y}),\\
Y_1 &= A(\alpha\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{L}), & M_1 &= A(\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z}),\\
Z_1 &= A(\beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M}), & N_1 &= A(\alpha\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{X}).
\end{aligned}
$$

De cette façon, les équations (1) et (1') donnent pour X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2 les relations qu'on obtient en y mettant ces lettres à la place de X, Y, Z, L, M, N et supposant dans les premiers membres le second et le troisième termes nuls. La résultante de X_1, Y_1, Z_1 est une force électrique qui survient quand on déplace un corps dans un champ magnétique et qui est perpendiculaire à la direction du mouvement et aux lignes de force magnétiques; c'est cette force que, dans un sens restreint, on a l'habitude d'appeler force électromotrice induite par le déplacement. Nous insistons sur ce point que, séparer celle-ci de la force totale ne peut avoir pour nous aucune signification physique, puisque nous nions que le champ magnétique puisse posséder dans l'intérieur d'un corps une vitesse relative par rapport à celui-ci. A la force X_1, Y_1, Z_1 correspond la force L_1, M_1, N_1 qui doit survenir dans un isolant, si celui-ci se déplace à travers les lignes de force d'un champ électrique; celle-ci n'est confirmée jusqu'ici par aucune expérience et n'existe pas dans l'ancienne électrodynamique.

Considérons maintenant la résultante de L_2, M_2, N_2 et imaginons dans ce but les solutions générales des équations relatives à ces grandeurs exprimées en fonction des quantités u, $\frac{d\mathfrak{X}}{dt}$, $\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$, etc. Si, dans ces solutions, on annule toutes ces quantités, il reste une première partie de la force qui ne provient pas des actions électrodynamiques. Les composantes de ce résidu possèdent évidemment un potentiel; c'est cette force qui, d'après les anciennes idées, est regardée comme une force à distance provenant de la masse magnétique. Une deuxième partie de la force totale sera donnée par cette partie de la solution complète qui s'évanouit en même temps que u, v, w. Elle comprend cette force magnétique à distance qui a l'apparence de provenir des courants électriques proprements dits. Nous obtenons toute la partie électrodynamique de la force L_2, M_2, N_2, si, dans l'expression de la deuxième partie, nous remplaçons $4\pi Au$ par

$$4\pi Au + A\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + A\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$$

et si nous opérons de même avec v et w. Cela revient à dire que, au point de vue de la génération d'une force magnétique à distance, on doit considérer comme équivalent au courant proprement dit, d'abord le changement de polarisation électrique, en second lieu le mouvement de

convection de l'électricité vraie. La dernière partie de cet énoncé trouve dans les recherches de ROWLAND la confirmation désirée.

Enfin examinons la force X_2, Y_2, Z_2. Tout d'abord on peut aussi séparer de cette force une partie indépendante des changements du système avec le temps; elle possède un potentiel et est traitée ordinairement comme une force électrostatique à distance. De la force électrodynamique restante, on peut détacher une seconde partie qui s'évanouit en même temps que $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{M}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{N}}{dt}$. Elle représente explicitement la force d'induction qui provient de la variation des aimants, mais elle contient aussi implicitement cette force électrique qui doit son existence aux courants variables. Enfin il reste encore une troisième et dernière partie qui doit être interprétée comme une force électrique produite par le magnétisme déplacé par convection et qui doit être citée afin d'expliquer certains phénomènes d'induction unipolaire.

Cette analyse montre que nous aurions pu aussi arriver au système des équations (1) et (1') par cette voie: nous aurions additionné l'action des diverses forces exigées par les anciennes théories et ajouté en outre une suite de termes hypothétiques qui ne peuvent être ni confirmés, ni démentis par les expériences présentes. La voie que nous avons suivie exigeait un nombre moindre d'hypothèses indépendantes. Déduisons maintenant de nos équations les énoncés les plus importants.

3. *Mouvement des corps chargés de magnétisme et d'électricité statique.*

Comme causes indépendantes pour la variation de la polarisation électrique ou magnétique, nous avons d'abord les forces magnétiques ou électriques, ensuite le mouvement des corps matériels. Comme nous l'avons montré pour les corps fixes, la première seule ne saurait d'aucune manière déplacer l'électricité vraie [1] dans les isolants, dans aucun cas elle ne produit

---

[1] C'est l'expression $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau$ que nous désignons par le nom d'électricité vraie de l'élément $d\tau$, l'expression $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)$ étant désignée par le nom d'électricité libre. L'analogue a lieu pour le magnétisme.

un déplacement du magnétisme vrai. La dernière déplace l'électricité et le magnétisme par rapport à un système de coordonnées fixe dans l'espace, mais non pas par rapport à la matière mobile elle-même, parce que celle-ci entraîne dans son mouvement les lignes de force dont les extrémités constituent l'électricité et le magnétisme vrais. Si donc les deux causes agissent en même temps, le magnétisme vrai dans tous les cas et l'électricité vraie dans les isolants ne peuvent pas avoir de vitesse relative par rapport à la matière qui les comprend; l'électricité et le magnétisme se meuvent, dans les dites conditions, avec la matière dans laquelle ils se trouvent comme s'ils étaient des substances invariablement attachées au points matériels. Pour répéter cette pensée dans le langage des formules, différentions les équations (1) puis (1′) par rapport à x, y, z et multiplions par l'élément $d\tau$ considéré comme fixe auquel répondent $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \ldots$ etc. Soit encore $d\tau'$ un élément d'espace qui embrassera à chaque époque la matière actuellement contenue dans $d\tau$; soient de', dm' les quantités d'électricité et de magnétisme proprement dit comprises dans l'élément $d\tau'$ et $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ etc. les valeurs de $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ etc. relatives à $d\tau'$. Nous obtenons alors

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)+\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)+\beta\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\\ &\qquad+\gamma\frac{d}{dz}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)+\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\Big\}d\tau\\ &\qquad\qquad=\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{d\mathfrak{L}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}'}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}'}{dz}\right)d\tau'\right\}=4\pi\frac{dm'}{dt}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned} &\Big\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)+\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)+\beta\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\\ &\qquad+\gamma\frac{d}{dz}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)+\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\Big\}d\tau\\ &\qquad\qquad=\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{d\mathfrak{X}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}'}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}'}{dz}\right)d\tau'\right\}=4\pi\frac{de'}{dt}=-4\pi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right).\end{aligned}\right.$$

Ces équations comprennent nos énoncés et les complètent au point de vue des conducteurs. Si les vitesses α, β, γ sont assez petites pour que les états électrique et magnétique puissent rester à chaque instant infiniment voisins des états statiques, la proposition obtenue est suffisante, mais aussi nécessaire, pour déterminer la dépendance des états qui peuvent provenir les

uns des autres. L'adjonction de cette proposition permet donc de remplacer, dans ces problèmes, les équations (1) et (1') complètes mais compliquées par les équations très simples relatives aux problèmes statiques dans les corps en repos et qui résultent des équations (1) et (1') en égalant à zéro les vitesses en tous les points de l'espace. Cette simplification n'est pas possible sans introduire l'idée d'électricité et de magnétisme vrais; c'est là surtout que me paraît fondée l'utilité trouvée dans ces idées pour l'électrostatique et l'étude des phénomènes magnétiques.

4. *Induction dans les circuits fermés.*

Dans les équations (1) et (1'), les vitesses α, β, γ sont multipliées par l'inverse de la vitesse de la lumière. Devant celle-ci, les plus grands vitesses que nous puissions donner aux corps sont tellement petites que les actions électrodynamiques proprement dites du mouvement ne sont perceptibles que dans le seul cas où ces actions consistent en un courant électrique induit dans un circuit métallique fermé. Pour déterminer, en ce cas, leur valeur, considérons dans l'intérieur de la matière considérée une portion de surface ω' quelconque, non fermée, et mobile avec les points du milieu où elle passe; soient s la longueur de la courbe qui limite cette surface, ζ' le nombre des lignes de force magnétiques qui la traversent. Les causes de variation de ζ' sont: d'abord les forces électriques, puis le mouvement de la matière. Si la première cause agissait seule, si par conséquent le système était fixe, la vitesse de changement de ζ' multipliée par A serait égale à l'intégrale de la force électrique prise le long du contour s, cette intégrale étant prise dans le sens des aiguilles d'une montre, pour un observateur situé suivant la normale positive. D'autre part le mouvement agissant seul n'aurait pas pour conséquence un changement de ζ' parce que, avec la surface ω', il entraînerait aussi les lignes de force qui la traversent. Ainsi donc, dans le cas réel de l'action simultanée des deux causes, l'intégrale de la force électrique le long de la courbe s égale la vitesse de changement du nombre des lignes de force qui traversent une surface ω' limitée par s, obéissant au mouvement, mais d'ailleurs quelconque. Cette proposition s'applique au cas très particulier, mais seul important pour l'expérience, où la courbe s forme le circuit d'un conducteur linéaire, et où le mouvement est suffisamment lent pour que les états

puissent être regardés comme stationnaires, et le courant naissant comme d'intensité égale dans toutes les parties du circuit s.

Pour traduire notre pensée en formule, nommons n', x; n', y; n', z les angles que fait à chaque instant avec les axes, la normale à l'élément $d\omega'$ de la surface mobile ω'. Soient $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}', \mathfrak{N}'$ les valeurs de $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ sur cet élément. Soient encore, $d\omega$; n, x; n, y; n, z les valeurs de $d\omega'$; n', x; n', y; n', z dans la position origine. Nous remarquons que nous avons, pour des raisons purement géométriques,

$$\frac{d}{dt}(d\omega'.\cos n', x) = d\omega\left\{+\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, x - \frac{d\beta}{dx}\cos n, y - \frac{d\gamma}{dx}\cos n, z\right\},$$

$$\frac{d}{dt}(d\omega'.\cos n', y) = d\omega\left\{-\frac{d\alpha}{dy}\cos n, x + \left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, y - \frac{d\gamma}{dy}\cos n, z\right\},$$

$$\frac{d}{dt}(d\omega'.\cos n', z) = d\omega\left\{-\frac{d\alpha}{dz}\cos n, x - \frac{d\beta}{dz}\cos n, y + \left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n, z\right\};$$

et nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta'}{dt} &= \frac{d}{dt}\int(\mathfrak{L}'\cos n', x + \mathfrak{M}'\cos n', y + \mathfrak{N}'\cos n', z)d\omega' \\
&= \int\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \alpha\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)\cos n, x\,d\omega \\
&\quad + \int\left(\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \alpha\frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{M}}{dz}\right)\cos n, y\,d\omega \\
&\quad + \int\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \alpha\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{N}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\cos n, z\,d\omega \\
&+ \int\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, x\,d\omega - \int\mathfrak{L}\frac{d\beta}{dx}\cos n, x\,d\omega - \int\mathfrak{L}\frac{d\gamma}{dx}\cos n, z\,d\omega \\
&- \int\mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy}\cos n, x\,d\omega + \int\mathfrak{M}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, y\,d\omega - \int\mathfrak{M}\frac{d\gamma}{dy}\cos n, z\,d\omega \\
&- \int\mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz}\cos n, x\,d\omega - \int\mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz}\cos n, y\,d\omega + \int\mathfrak{N}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n, z\,d\omega;
\end{aligned}$$

d'où, avec le secours des équations (1) et (1')

$$A\frac{d\zeta'}{dt} = \int\left\{\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\cos n, x + \left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)\cos n, y\right.$$

$$\left. + \left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\cos n, z\right\}d\omega = \int(Xdx + Ydy + Zdz),$$

la dernière intégrale étant prise le long du contour de la surface ω. Dans certains cas, la proposition obtenue se simplifie. S'il est possible de trouver un espace qui renferme complètement la courbe s et dans lequel ne se trouve pas de masse magnétique vraie, il est évidemment indifférent que la surface auxiliaire ω' suive le mouvement de la partie matérielle ou subisse un déplacement indépendant de celle-ci, pourvu qu'elle reste seulement à l'intérieur de cet espace et demeure limitée par la courbe s. Dans ce cas nous pouvons dire plus simplement: l'intégrale de la force électrique le long d'une courbe fermée s est égale à la vitesse multipliée par A du changement du nombre des lignes de force magnétiques qui sont embrassées par la courbe s. Si dans la même hypothèse la polarisation magnétique est constante en chaque point de l'espace malgré le déplacement de s, la force induite dans la courbe s est égale au nombre multipliée par A des lignes de force magnétiques que la courbe s, dans son déplacement, coupe dans un sens déterminé. Si les forces magnétiques sous l'influence desquelles se meut la courbe s proviennent uniquement d'un courant uniforme dans un circuit t, le nombre des lignes de forces qui traversent s est, comme nous l'avons montré,[1] le produit du potentiel mutuel (de Neumann) des courbes s et t par l'intensité du courant dans le circuit t. Dans ce cas, le changement multiplié par A du produit énoncé, calculé pour l'unité de temps, donne la force électromotrice agissante dans la courbe s.

Sous l'une ou l'autre forme, ces propositions embrassent tous les cas connus d'induction. Les lois de l'induction unipolaire peuvent elles aussi être déduites facilement des énoncés généraux. Les phénomènes d'induction dans les corps à trois dimensions n'ont été étudiés qu'incomplètement au point de vue quantitatif. Les équations par lesquelles Jochmann[2]

[1] H. Hertz, l. c. p. 641.

[2] Jochmann, Journal für Mathematik, Bd. 63, p. 1. 1863.

et d'autres ont pu représenter l'ensemble des faits observés résultent immédiatement de nos équations générales en négligeant des termes qui s'évanouissent par suite de la nature spéciale du problème traité.

Nous ne voulons pas omettre de mentionner que la proposition générale de l'induction peut s'énoncer sous une autre forme très élégante si on consent à parler d'un mouvement propre des lignes de force et à considérer tout changement général de la polarisation magnétique comme conséquence d'un tel mouvement des lignes de force. Nous pouvons dès lors dire, en épuisant tous les cas possibles: la force électrique induite dans une courbe quelconque s est égale au nombre multiplié par A des lignes de force magnétique qui, dans l'unité de temps, sont coupées dans un sens déterminé par la courbe s. Cependant, bien que rien ne défende de faire un usage accidentel du mode de raisonnement qui est au fonds de cet énoncé, nous ferons mieux de l'éviter dans le présent mémoire. Car cette idée employée par FARADAY et développée par POYNTING,[1] que les lignes de force peuvent avoir une vitesse relative par rapport au milieu qu'elles traversent est certes tout à fait remarquable; mais elle est d'une nature absolument différente de la nôtre par laquelle les lignes de force représentent les divers états de la matière. Cela n'a pas de sens de parler d'un mouvement propre de pareils états.

5. *Surfaces de glissement.*

A la surface de séparation des corps de nature différente, les constantes électrodynamiques peuvent passer d'une manière discontinue d'une valeur à une autre sans que, en même temps, les composantes de la vitesse α, β, γ sur cette surface subissent des changements brusques. Comme surfaces de discontinuité de cette espèce, on doit considérer les surfaces de contact des corps solides contre les liquides ou des liquides entre eux; nous pouvons aussi supposer de cette nature la séparation des corps avec l'éther. L'intervention du mouvement continu à de telles surfaces de séparation ne donne lieu à aucune nouvelle considération; les états des parties matérielles des deux côtés de la surface sont liées par les relations connues pour les corps fixes.

---

[1] I. H. POYNTING, Philosophical Transactions, t. 2, p. 277. 1885.

Il en est autrement des surfaces où les composantes de la vitesse subissent des changements discontinus. Comme, d'après une remarque de l'introduction, la discontinuité ne peut affecter que les composantes parallèles aux surfaces de séparation, il convient d'appeler celles-ci surfaces de glissement. Elles peuvent se trouver chez les corps solides qui se touchent. Il est aussi quelquefois commode et permis par notre ignorance de la vérité de considérer la surface de séparation d'un corps avec l'éther comme une surface de glissement. Comme nous le remarquions aussi dans l'introduction, nous considérons une surface de glissement comme le cas limite d'une couche de passage dans laquelle les vitesses et peut-être aussi les constantes électrodynamiques peuvent passer, très vite il est vrai, mais d'une façon continue d'une valeur à une autre. Cette manière de voir rend applicable à un système où se trouvent des surfaces de glissement les propositions générales que nous avons obtenues jusqu'ici. La justification de cette méthode est qu'elle ne conduit pas à des contradictions avec l'expérience. Pour qu'elle suffise à déterminer les relations aux surfaces de glissement, la manière dont on passe à la limite doit être assujettie à certaines restrictions générales. Ces restrictions consistent à supposer qu'une suite de grandeurs reste finie dans la couche de passage. Nous faisons abstraction de l'existence des forces électromotrices à la surface de glissement. Nous choisissons l'origine des coordonnées en un point de l'élément considéré de la couche de passage, elle suivra ce point dans son mouvement; l'axe des z sera choisi et demeurera perpendiculaire à la surface de glissement. La couche de passage forme donc constamment le voisinage immédiat du plan xy. Nous supposons encore que dans la couche de passage les quantités

$$\begin{array}{ccc} X, Y, Z, & & L, M, N, \\ \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, & & \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \\ u, v, w, & & \alpha, \beta, \gamma \end{array}$$

restent finies ainsi que les dérivées de ces quantités parallèlement à la surface de séparation, c'est à dire par rapport à x et y, puis les dérivées de $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ par rapport au temps t. Au contraire, nous ne pouvons pas exclure l'existence de dérivées infinies par rapport à z, à

l'exception de $\frac{d\gamma}{dz}$ qui doit rester finie d'après une remarque mentionnée dans l'introduction. D'après cela, γ lui-même est évanouissant dans toute la couche de passage. Cela supposé, multiplions les deux premières de chaque groupe des équations (1) et (1′) par dz, intégrons par rapport à z à travers la couche de passage et n'oublions pas que, à cause de la petitesse du champ de l'intégration, toute intégrale de quantités finies s'évanouit. En désignant par 1 et 2 les deux côtés de la surface de glissement, nous obtenons les 4 équations

$$(5) \qquad A\int_1^2 \mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz}dz = Y_2 - Y_1, \qquad -A\int_1^2 \mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz}dz = X_2 - X_1,$$

$$(5') \qquad -A\int_1^2 \mathfrak{S}\frac{d\alpha}{dz}dz = M_2 - M_1, \qquad A\int_1^2 \mathfrak{S}\frac{d\beta}{dz}dz = L_2 - L_1.$$

Elles donnent la relation qui lie les composantes tangentielles de la force de part et d'autre de la surface de glissement. Les composantes normales à la surface de séparation sont, ici comme dans les corps fixes, liées par la condition que la densité superficielle du magnétisme vrai dans les surfaces de contact ne peut changer d'autre façon que par convection, ni la densité superficielle de l'électricité d'autre façon que, soit par convection, soit par un courant proprement dit.

Si l'élément considéré de la couche de contact ne renferme pas d'éléctricité ou de magnétisme vrais, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{N}$ sont constants à l'intérieur de la couche de passage; les égalités (5) et (5′) prennent alors la forme plus simple

$$(5'') \qquad X_2 - X_1 = A\mathfrak{N}(\beta_1 - \beta_2), \qquad Y_2 - Y_1 = A\mathfrak{N}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$(5''') \qquad L_2 - L_1 = A\mathfrak{S}(\beta_2 - \beta_1), \qquad M_1 - M_2 = A\mathfrak{S}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Pour donner un exemple de l'application de ces équations, imaginons qu'un solide de révolution tourne autour de son axe dans l'espace creux d'un autre solide qui l'embrasse étroitement. Si ce système vient à être soumis à l'influence d'une distribution de forces magnétiques qui soit symétrique par rapport à l'axe de rotation, il n'y aura, d'après notre

manière de voir, aucun motif d'apparition de force électrique dans l'intérieur des deux corps. De telles forces feront en effet défaut si l'excitation magnétique se borne entièrement à l'intérieur de l'un ou l'autre corps. Mais si les lignes de force traversent la surface suivant laquelle les deux corps se touchent, alors elles provoquent sur cette surface les forces électromotrices données par les équations (5''); ces forces se propagent à l'intérieur des corps et par conséquent y produisent les tensions et les courants électriques. Effectivement, l'expérience ne laisse pas de doute sur la naissance des courants dans ces conditions. Si les corps considérés ne sont pas conducteurs et si on les soumet à l'influence de forces électriques, distribuées symétriquement autour de l'axe de rotation et qui ne s'évanouissent pas à la surface de glissement, les équations (5''') montrent que le mouvement introduit des forces magnétiques dans le voisinage de cette surface. Sans doute ces actions n'ont pas encore été observées avec autant de certitude que les premières mentionnées, cependant une indication au moins de celles-ci se trouve dans les expériences de M. Röntgen.[1]

Dans le cas général où sur la surface de contact se trouve une couche d'électricité vraie et de magnétisme vrai, la connaissance seule de la densité superficielle de cette couche ne suffit pas pour trouver les intégrales des équations (5) et (5'); il faut connaître en outre de quelle manière l'électricité et le magnétisme participent au mouvement de l'un ou l'autre corps en contact dans la couche de passage. Cette indétermination réside dans la nature du sujet. Imaginons que, dans l'expérience de Rowland sur l'action magnétique de l'électricité en mouvement de convection, le disque électrisé tourne, non plus dans l'air, mais dans un isolateur solide qui l'entoure étroitement. L'action magnétique s'abaisserait évidemment jusqu'à s'évanouir, à mesure que l'électricité passerait de la surface du disque tournant sur la surface en contact du corps fixe.

6. *Conservation de l'énergie. Forces pondéromotrices.*

Pendant que le système passe de l'état primitif à l'état final, imaginons chaque élément de temps partagé en deux périodes. La première

[1] W. C. Röntgen, Wiedemann's Annalen, t. 35, p. 264. 1888.

fera passer les parties matérielles de la première à la dernière position et par suite entraînera les lignes de forces dans le mouvement des parties matérielles. Dans la deuxième période, l'action des forces électriques et magnétiques subsistantes interviennent pour amener les états électromagnetiques à leur état final. Le changement total de l'énergie électrodynamique du système est la somme des variations qu'elle éprouve dans les deux périodes. Dans la deuxième période, les choses se passent comme dans les corps fixes. Dans ce cas, nous savons déjà comment les variations de l'énergie électrodynamique sont compensées par d'autres formes d'énergie. Mais, pendant la première période, l'énergie électrodynamique de chaque partie du système change aussi. Il nous reste donc à montrer ce que devient l'énergie disparue, d'où vient l'énergie accumulée. Par l'expérience présente, on peut démontrer sans incertitude la rigueur de cet énoncé que, dans tout système électrodynamique complet, l'énergie en question est compensée par le travail mécanique exécuté, pendant le temps considéré, par les forces pondéromotrices électriques et magnétiques du système. Cet énoncé accepté comme absolument général ne suffit cependant pas encore pour déduire complètement et avec rigueur les forces pondéromotrices des changements calculables de l'énergie électrodynamique. Nous admettrons donc encore deux choses, nécessitées, non par l'expérience, mais par nos principes particuliers. La première, c'est que l'énoncé donné, et vérifié expérimentalement pour tout système électrodynamique complet, est applicable aussi à toute partie matérielle du système. La deuxième, c'est qu'une partie quelconque du système ne peut exercer sur la partie restante aucune autre force pondéromotrice que des pressions qui, à la surface commune, sont exercées par les éléments de la première partie sur les éléments en contact de la partie restante; ces forces, en chaque point de la surface de contact, dépendent seulement des états électromagnétiques du voisinage immédiat. La première hypothèse détermine les pressions exigées par la deuxième; nous allons en calculer les grandeurs et montrer qu'elles permettent d'expliquer les faits de l'observation immédiate. Quant au principe de la conservation de l'énergie, il est évident qu'il est satisfait par la façon même dont nous déterminons les forces de pression.

Considérons, pendant l'élément de temps dt, l'énergie magnétique d'un élément matériel et soient $d\tau'$ son volume variable, $d\tau$ la valeur de

$d\tau'$ au début de l'élément de temps dt. Pour simplifier, choisissons l'origine des coordonnées en un point matériel de $d\tau'$. Si $d\tau'$ se déplace comme un corps rigide pendant qu'il entraîne ses lignes de force avec lui, son énergie intérieure ne changera pas. Donc le changement de cette énergie est exclusivement une fonction des déformations qu'éprouve $d\tau'$ par suite du mouvement. Nous allons chercher la valeur de cette fonction. Il faut remarquer cependant que les déformations font varier non seulement les polarisations mais aussi les propriétés du support matériel de ces polarisations, c'est à dire les constantes magnétiques. Pour calculer ces variations, nous devons établir une suite de nouvelles notations. Nous définissons d'abord à côté des constantes μ, une suite de constantes μ' par la condition que l'on ait:

$$\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N = \mu_{11}L^2 + 2\mu_{12}LM + \ldots = \mu'_{11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots$$

Les μ' sont donc les coefficients des $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dans les fonctions linéaires de ces grandeurs qui sont égales aux forces L, M, N. Nous nommons ensuite ξ, η, ζ les déplacements éprouvés pendant le temps dt par le point dont les vitesses sont α, β, γ. Des lors les grandeurs

$$\frac{d\xi}{dx} = x_x, \qquad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = x_y, \ \ldots$$ [1]

sont les composantes des déformations de l'élément $d\tau'$ dans lequel se trouvent les déplacements ξ, η, ζ. Les constantes μ' sont des fonctions de ces déformations; elles dépendent en outre des rotations ρ, σ, τ que le mouvement fait subir à cet élément. Comme pendant le temps dt, aussi bien les x_x, x_y, etc. que les ρ, σ, τ restent infiniment petits, la relation est linéaire; elle est connue dès qu'on donne les dérivées des μ' par rapport à $\rho, \sigma, \tau, x_x, x_y$, etc. Les dérivées par rapport à ρ, σ, τ sont calculables au moyen des valeurs des μ' elles-mêmes; mais, pour les dérivées par rapport à x_x, x_y, etc. il n'en est pas de même, et nous devons admettre qu'on nous donne d'autre part les grandeurs

$$\frac{d\mu'_{11}}{dx_x} = \mu'_{1111}, \qquad \frac{d\mu'_{11}}{dx_y} = \mu'_{1112}, \ \ldots, \qquad \frac{d\mu'_{12}}{dx_x} = \mu'_{1211}, \qquad \frac{d\mu'_{12}}{dx_y} = \mu'_{1212}, \ \ldots$$

[1] Vgl. G. Kirchhoff, *Mechanik*, p. 123. 1887.

Les 36 constantes ainsi définies correspondent évidemment à des propriétés magnétiques de la matière particulière qui remplit l'espace $d\tau'$ dans l'état instantané de sa déformation. Nous ne pouvons pour notre but laisser de côté aucune de ces constantes ni en calculer à priori aucune au moyen des propriétés magnétiques considérées jusqu'ici. Par une orientation convenable du système des coordonnées, on peut diminuer le nombre des constantes nécessaires; une diminution survient aussi si certaines conditions de symétrie sont réalisées par rapport au système de coordonnées. Dans le cas le plus simple, la substance est homogène au début et demeure homogène malgré les déformations qui surviennent; c'est le cas des fluides. Le nombre des constantes s'abaisse alors à une seule qui, avec la constante de magnétisation, définit d'une manière suffisante les propriétés magnétiques. Il semble possible d'ailleurs que, même dans le cas général, on puisse démontrer entre les constantes des relations nécessaires qui les réduiraient à un nombre moindre de constantes indépendantes.

Ces notations posées, nous obtenons successivement, pour la variation d'énergie de l'espace $d\tau'$ dans l'unité de temps, les deux expressions suivants:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)d\tau'\right\} \\ = \dfrac{1}{8\pi}\left\{d\tau\dfrac{d}{dt}(\mu'_{11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\dfrac{d}{dt}d\tau'\right\} \\ = \dfrac{1}{8\pi}d\tau\left\{2\left(L\dfrac{d\mathfrak{L}}{dt} + M\dfrac{d\mathfrak{M}}{dt} + N\dfrac{d\mathfrak{N}}{dt}\right) + \left(\dfrac{d\mu'_{11}}{dt}\mathfrak{L}^2 + 2\,\dfrac{d\mu'_{12}}{dt}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots\right)\right. \\ \qquad\left. + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\left(\dfrac{d\alpha}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy} + \dfrac{d\gamma}{dz}\right)\right\}. \end{cases}$$

Nous allons faire disparaître dans la dernière les dérivées par rapport au temps. Pour les grandeurs $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}, \frac{d\mathfrak{M}}{dt}, \frac{d\mathfrak{N}}{dt}$, les équations (1') nous donnent, en tenant compte seulement de l'influence du mouvement et en annulant les vitesses α, β, γ en vertu du choix de notre système de coordonnées:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) + \mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy} + \mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz},$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\alpha}{dx}\right) + \mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz} + \mathfrak{L}\frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = -\mathfrak{N}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \mathfrak{L}\frac{d\gamma}{dx} + \mathfrak{M}\frac{d\gamma}{dy}.$$

Ensuite nous avons pour la grandeur $\frac{d\mu'_{11}}{dt}$

$$\frac{d\mu'_{11}}{dt} = \frac{d\mu'_{11}}{dx_x}\frac{dx_x}{dt} + \frac{d\mu'_{11}}{dx_y}\frac{dx_y}{dt} + \dots + \frac{d\mu'_{11}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} + \dots$$

$$= \mu'_{11\,11}\frac{d\alpha}{dx} + \mu'_{11\,12}\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right) + \dots + \frac{1}{2}\frac{d\mu'_{11}}{d\rho}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + \dots .$$

Nous obtenons des expressions analogues pour $\frac{d\mu'_{12}}{dt}, \dots.$ Nous portons toutes ces valeurs dans la dernière expression (6); cette expression deviendra une fonction linéaire homogène des 9 dérivées de α, β, γ par rapport à x, y, z. Mais nous pouvons ordonner cette fonction de façon qu'elle se présente comme une fonction linéaire homogène des 6 vitesses de déformation $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}, \dots$ et des 3 vitesses de rotation $\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right), \dots.$ Nous remarquons ensuite que les coefficients des 3 vitesses de rotation doivent nécessairement disparaître, parce que si l'élement se déplace comme un corps solide, son énergie interne demeure constante. Ainsi, nous rejetons simplement les termes affectés de ces vitesses de rotation; nous réduisons à l'unité de volume en divisant par $d\tau$, et nous obtenons finalement:

$$\frac{1}{d\tau}\frac{d}{dt}\left|\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)d\tau'\right| = \frac{1}{8\pi}\frac{d\alpha}{dx}\quad(\mathfrak{L}L - \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu'_{11\,11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,11}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \dots)$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\frac{d\beta}{dy}(-\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu'_{11\,22}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,22}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \dots)$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\frac{d\gamma}{dz}(-\mathfrak{L}L - \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N + \mu'_{11\,33}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,33}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \dots)$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\right)(\mathfrak{N}M + \mathfrak{M}N + \mu'_{11\,23}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,23}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \dots)$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}\right)(\mathfrak{L}N + \mathfrak{N}L + \mu'_{11\,13}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,13}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \dots)$$

$$+ \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)(\mathfrak{M}L + \mathfrak{L}M + \mu'_{11\,12}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \dots).$$

Dans la fonction linéaire des vitesses de déformation que forme le second membre, le coefficient changé de signe de chacune de ces vitesses donne évidemment la composante de pression par laquelle la matière en perturbation magnétique tend à augmenter la déformation correspondante. Nommons en effet, suivant une notation usitée,[1] X_x, X_y, X_z les composantes de la pression que la matière de l'élément $d\tau$ fait subir à une surface perpendiculaire à l'axe x, et adoptons la même notation pour les autres axes; l'expression

$$X_x\frac{d\alpha}{dx} + Y_y\frac{d\beta}{dy} + Z_z\frac{d\gamma}{dz} + Y_z\left(\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\right) + X_z\left(\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}\right) + X_y\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)$$

donne le travail mécanique dépensé par la matière de l'élément $d\tau$ dans la déformation, ce travail étant rapporté aux unités de temps et de volume. D'après notre hypothèse, ce travail mécanique est égal à l'énergie magnétique perdue par suite de la déformation. Comme cela a lieu pour toute déformation, il en résulte la démonstration de notre énoncé. Chacune des composantes de pression est une fonction quadratique homogène des 3 composantes de la force magnétique régnante, ou si on veut également, de la polarisation magnétique régnante. Par des considérations tout à fait analogues, on peut obtenir des expressions tout à fait analogues pour les pressions qui proviennent des perturbations électriques. La pression résultante est la somme des pressions électrique et magnétique.

Sur les valeurs trouvées des pressions pondéromotrices, nous ferons trois remarques. La première concerne la différence entre notre système de pressions et le système que MAXWELL a donné pour le cas général où les forces et les polarisations n'ont pas la même direction.[2] Les formules de MAXWELL sont d'abord plus simples parce que pour les établir il ne tient aucun compte de la déformation possible du milieu. Une différence beaucoup plus importante consiste en ce que les composantes de pression X_y et Y_x ont des valeurs différentes chez MAXWELL, et chez nous sont identiques. D'après notre système, chaque particule matérielle abandonnée à elle-même changera de forme en obéissant au principe des aires; d'après le système de MAXWELL elle prendra une rotation en même temps et

[1] G. KIRCHHOFF, *Mechanik*. Elfte Vorlesung.

[2] MAXWELL, *Treatise on electricity and magnetism*. 1873. Vol. 2, p. 254 (p. 313 de la traduction française de M. SELIGMANN-LUI).

n'obéira donc pas à ce principe. Les pressions de MAXWELL ne peuvent donc pas devoir leur existence à ce qui se passe dans l'intérieur de l'élément, elles ne trouvent aucune place dans la théorie élaborée ici. Elles sont sans doute admissibles, si l'on part de cette hypothèse que, dans l'intérieur des corps en mouvement, l'éther demeure en repos et fournit le point d'appui nécessaire pour la rotation qui survient.

La deuxième remarque concerne la forme simple que prennent nos formules, quand on les applique aux corps qui, comme les fluides, sont isotropes et demeurent tels malgré la déformation. Le système de constantes μ' se réduit à une seule $\mu' = \frac{1}{\mu}$. Si nous désignons encore par σ la densité du fluide, nous avons

$$\mu'_{1111} = \mu'_{2222} = \mu'_{3333} = -\frac{d\frac{1}{\mu}}{d\log\sigma} = \frac{1}{\mu^2}\frac{d\mu}{d\log\sigma},$$

$$\mu'_{1211} = \ldots = 0.$$

Alors les composantes de la pression sont:

$$6') \quad \begin{cases} X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d\log\sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ Y_y = \frac{\mu}{8\pi}\quad(L^2 - M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d\log\sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ Z_z = \frac{\mu}{\pi}\quad(L^2 + M^2 - N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d\log\sigma}(L^2 + M^2 + N^2), \\ X_y = -\frac{\mu}{4\pi}LM, \\ X_z = -\frac{\mu}{4\pi}LN, \\ Y_z = -\frac{\mu}{4\pi}MN. \end{cases}$$

VON HELMHOLTZ[1] est déjà parvenu pour le même cas et par une voie semblable à un résultat tout à fait identique. Nos formules se trans-

[1] v. HELMHOLTZ, Wiedemann's Annalen, t. 13, p. 400. 1881.

forment dans les siennes par un simple changement de notation. Il suffit de remplacer L, M, N, μ par $\frac{\lambda}{\vartheta}$, $\frac{\mu}{\vartheta}$, $\frac{\nu}{\vartheta}$, $1 + 4\pi\vartheta$ et de remarquer que le θ de HELMHOLTZ est égal à $\frac{d\vartheta}{d \log \sigma} = \frac{d\mu}{4\pi d \log \sigma}$.[1]

La troisième remarque concerne la question de savoir jusqu'à quel point les résultantes des pressions déduites de nos hypothèses concordent avec les forces mécaniques et les couples que nous observons effectivement dans les corps qui subissent une perturbation électromagnétique. Nous remarquons avant tout qu'en réalité nos expériences sont limitées aux systèmes infiniment voisins de l'état statique ou stationnaire. Mais, pour de tels systèmes, le principe de la conservation de l'énergie, à lui seul, suffit à déterminer complètement et sans ambiguité, par la perte d'énergie due au déplacement des corps, la force mécanique qui s'y oppose et on peut regarder comme déjà prouvé que les forces ainsi calculées sont d'accord avec l'observation. Comme les pressions que nous avons calculées forment un système de forces qui satisfait au principe de la conservation de l'énergie, elles coïncident avec le premier système de forces, calculé par le même principe et qui est d'accord avec l'expérience. Pour parvenir au même résultat à postériori, remarquons que dans les conditions de la réalité, les pressions électrodynamiques sont beaucoup trop faibles pour produire des déformations considérables des éléments de volume des corps solides. Celles de ces déformations qui sont dues à l'électricité constituent les phénomènes d'électrostriction; on a l'habitude de les séparer sous ce titre des phénomènes de l'électrodynamique proprement dite. Si donc nous faisons ici abstraction de cette classe de phénomènes délicats, il est équivalent pour la suite, ou de prendre pour les corps solides les pressions que nous avons calculées, ou de n'en prendre aucune, ou d'en prendre d'autres quelconques du même ordre de grandeur. Nous pouvons donc nous contenter, pour le cas général, des formules simples (6′). Dans ces formules, il faut entendre par μ, pour le cas des corps cristallisés, une constante quelconque du même ordre de grandeur que $\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots$. Mais nous pouvons simplifier encore les formules (6′) en négligeant les

---

[1] Les signes sont contraires, parce que, c'est la poussée que HELMHOLTZ et la pression que nous comptons positivement.

termes affectés de $\frac{d\mu}{d \log \sigma}$. Car ces termes représentent une pression uniforme et ne peuvent provoquer aucun déplacement fini dans les liquides, à cause de leur faible compressibilité: ils produiront seulement des phénomènes d'électrostriction et de magnétostriction. Dans les corps gazeux, ces termes disparaissent parce que la constante μ et la constante diélectrique ne changent pas sensiblement avec la densité σ. D'apres celà, les forces pondéromotrices qui provoquent les déplacements mesurables des corps les uns par rapport aux autres doivent être bien représentées par les résultantes du système suivant de pressions, adopté comme entièrement valable:

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2), \qquad X_y = -\frac{\mu}{4\pi} LM,$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi} \quad (L^2 - M^2 + N^2), \qquad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL,$$

$$Z_z = \frac{\mu}{8\pi} \quad (L^2 + M^2 - N^2), \qquad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN.$$

Ce système simplifié des pressions magnétiques est maintenant celui de MAXWELL.[1] MAXWELL a bien montré que ce système, joint à celui des pressions électriques correspondantes contient les forces pondéromotrices observées entre les aimants, les courants stationnaires et les corps électrisés. Nous pouvons nous rapporter à son exposition simple.

D'ailleurs, et cela ne parait pas avoir été remarqué, le système calculé des pressions ne laisse en repos l'intérieur d'un corps homogène, en particulier de l'éther, que si les forces agissantes ont un potentiel, comme dans les états statiques ou stationnaires. Dans le cas d'une perturbation électromagnétique quelconque, les pressions trouvées doivent mettre en mouvement l'intérieur de l'éther, que nous avons expressément supposé mobile, avec des vitesses que nous pourrions calculer si nous avions une donnée sur la masse de l'éther. Ce résultat parait peu vraisemblable. Cependant, à l'égard du présent travail, on n'est pas fondé à refuser la théorie à cause de lui, car il n'est en contradiction ni avec nos hypo-

---

[1] MAXWELL, *Treatrise on electricity and magnetism*. 1873. Vol. 2, p. 256 (p. 315 de la traduction française). Les signes sont ici changés parce que chez MAXWELL c'est une poussée et chez nous une pression qui est comptée positivement.

thèses, ni avec l'expérience. La faible masse d'air qui reste dans les espaces vides suffit par exemple bien entièrement à porter à une grandeur insensible les courants qui pourraient être excités dans cet espace.

Pour terminer, je désire insister encore sur ce point, que c'est seulement au point de vue de l'ordre systématique que j'attribue une valeur à la théorie exposée ici. Elle montre comment nous pouvons traiter entièrement les phénomènes électromagnétiques dans les corps mobiles sous certaines restrictions d'ailleurs arbitraires. Que ces restrictions répondent au cas de la nature, cela est peu vraisemblable. La théorie rigoureuse distinguerait plutôt les états de l'éther de ceux de la matière pondérable qui lui est mêlée. Mais l'établissement d'une théorie correspondante à cette considération me paraissait exiger des hypothèses plus nombreuses et plus arbitraires que celles qui font la base de la présente théorie.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 14. — 1890—1891. — TOME 14.

Seite. Pages.

BERGER, A. Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli .... 249—304

BRIOSCHI, F. Les invariants des équations différentielles linéaires .... 233—248

CASORATI, F. Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune .... 95—110

HACKS, J. Über die Classenanzahl der zu einer negativen Determinante $D = -q$ gehörigen eigentlich primitiven quadratischen Formen, wo q eine Primzahl von der Form $4n + 3$ ist........ 321—328

HACKS, J. Einige Anwendungen der Function $[x]$ .... 329—336

HENSEL, K. Über die Darstellung der Determinante eines Systems welches aus zwei anderen componirt ist........ 317—319

HERTZ, H. Sur les équations fondamentales de l'électrodynamique pour les corps en mouvement .... 349—375

HILBERT, D. und **HURWITZ, A.** Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null .... 217—224

HORN, I. Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen .... 337—347

HURWITZ, A. Über beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen........ 211—215

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

	Seite. Pages.
JUEL, C. Über einige Grundgebilde der projectiven Geometrie	1— 30
KIRCHHOFF, G. Beweis der Existenz des Potentials das an der Grenze des betrachteten Raumes gegebene Werthe hat für den Fall dass diese Grenze eine überall convexe Fläche ist	179—183
KOWALEVSKI, S. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe	81— 93
PHRAGMÉN, E. Remarques sur la théorie de la représentation conforme	225—232
RASCHKE, W. Über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung in welchen die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt	31— 80
SCHEFFERS, G. Bestimmung einer Klasse von Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes	111—178
SCHRÖTER, H. Über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung	207—209
SYLVESTER, J. J. On a funicular universal solution of Buffon's »problem of the needle» in its most general form	185—205
TCHEBYCHEFF, P. Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités	305—315

BERICHTIGUNG.

Seite 183, Z. 19 statt $\alpha U_{a+1} + \beta$ lese man αU_{h+1}.

